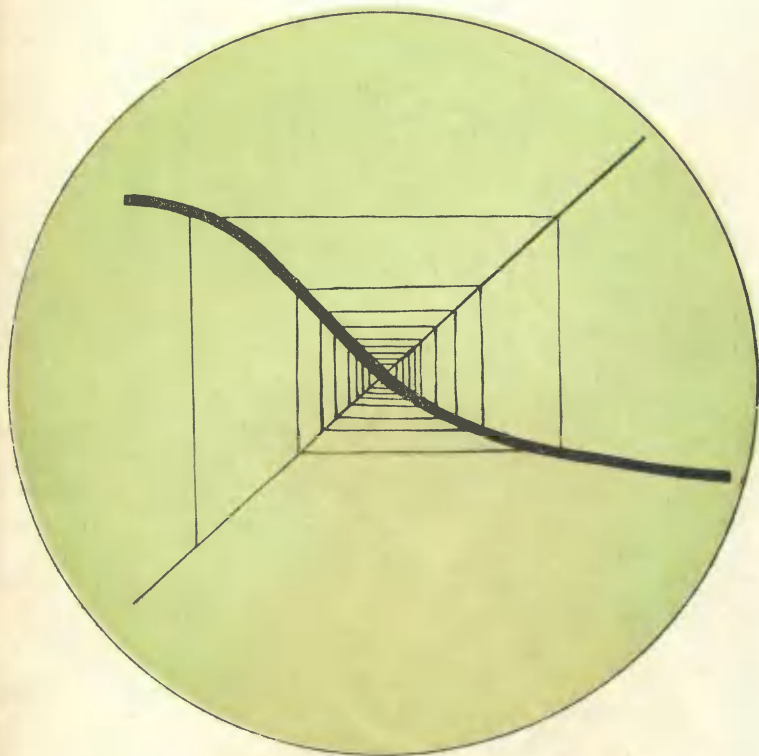


51  
243  
Математика

Лас  
Библиотечка  
Физико-математической школы

А.А.Нирилов

# Пределы



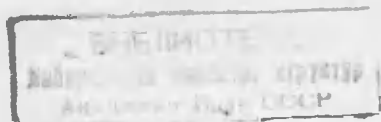
Математика

Библиотечка  
физико-математической школы  
Выпуск 2\*

А. А. Кириллов

# Пределы

Издание второе,  
переработанное



Издательство «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической литературы  
Москва 1973

- 8039 -

517.2  
К 43  
УДК 517.0

Математика

Библиотечка  
физико-математической школы

Редактор серии  
И. М. Гельфанд

© Издательство «Наука», 1973, с изменениями

К  $\frac{0222-1820}{042(02)-73}$  38-73

## Оглавление

Предисловие . . . . .				4
	Задачи	Решения	Ответы и указания	
§ 1. Подготовительные задачи . .	7	42	91	
§ 2. Задачи, связанные с определе- нием предела . . . . .	20	54	92	
§ 3. Задачи на вычисление пределов	31	70	93	
Контрольные задачи . . . . .				40

## Предисловие

Настоящий выпуск серии «Библиотечка физико-математической школы» посвящен понятию предела, которое справедливо считается самым трудным в школьной программе. Тем более трудно освоиться с этим понятием самостоятельно, по книжке.

Однако, как показывает опыт Заочной математической школы при МГУ, большинство школьников могут справиться с этой задачей.

Книжка написана в форме задачника, но она может одновременно служить и учебником по теме «Пределы».

Предлагаемые здесь задачи можно разбить на три группы. Задачи первой группы (они никак не отмечены) составляют основу всей книжки. Решение их необходимо для понимания основных определений и теорем. Задачи второй группы (они отмечены кружком) не являются обязательными. Некоторые из них служат для иллюстрации различных теорем, другие полезны для развития и тренировки логического мышления, третьи — просто красивые задачи, решение которых доставит вам удовольствие. Наконец, третью группу составляют более трудные задачи (они отмечены звездочкой). Эти задачи рассчитаны на более высокую логическую подготовку и свободное владение основными понятиями.

Те из вас, кто хочет овладеть теорией пределов в рамках школьной программы, могут ограничиться решением задач первой группы. Проверкой вам будут служить контрольные задачи, помещенные на стр. 40—42.

В этом выпуске, как и в предыдущих, используются «дорожные знаки».

Знаком «Стоянка разрешена» отмечены места, содержащие сведения, необходимые для дальнейшего: определения, теоремы, формулы и т. д. Около такого знака надо остановиться и внимательно прочитать это место.



Знак «Крутой подъем» стоит там, где содержится более трудный материал. Если это мелкий шрифт, то при первом чтении это место можно пропустить.



Особенно внимательны будьте около знака «Опасный поворот». Часто он стоит на таком месте, где на первый взгляд все кажется легким и простым. Однако если не разобраться как следует, то это может привести в дальнейшем к серьезным ошибкам.



Как лучше всего работать с книжкой? Начните с подготовительных задач (см. § 1). Решите несколько из них и сравните полученные результаты с приведенными ответами. Потом прочитайте решения. Это полезно сделать даже в том случае, если задача не вызвала затруднения, так как в решениях часто сообщаются полезные дополнительные сведения, а иногда ставятся новые вопросы.

Если задача не получается, несмотря на ряд попыток, загляните в раздел «Ответы и указания», а если и после этого вы не сможете решить задачу, прочитайте решение.

После того как вы справитесь с большинством подготовительных задач, переходите к следующим параграфам книжки.

Прежде, чем решать задачи, внимательно прочитайте определение предела и текст на стр. 20—22.

Задачи, отмеченные звездочкой, при первом чтении лучше пропустить. Вы вернетесь к ним позже, освоившись с понятием предела и научившись решать более простые задачи.

Не относитесь пренебрежительно к подготовительным задачам (§ 1).

На первый взгляд эти задачи не имеют никакого отношения к теме «Пределы». Действительно, понятие предела в них не встречается. Цель этих задач — приучить вас к логическому мышлению, к точному выражению своей мысли, к аккуратным формулировкам. Некоторые школьники рассуждают так: математика — это не литература, здесь

важно придумать идею решения задачи, а как изложить эту идею, в каком порядке расставить слова — не так уж важно. Это неверно. Очень часто неумение ясно выражать свои мысли не дает возможности школьнику решить задачу и даже осмыслить ее условие.

Большинство подготовительных задач из § 1, да и всей книжки, легко решается, если вы ясно представите себе, что дано и что требуется доказать. Но как раз этого-то многие школьники и не умеют делать. Лучший способ справиться с этим недостатком — решать много задач, «хороших и разных».

Желаю вам успеха.

Эта книжка возникла из главы, посвященной пределам, в третьем выпуске нашей серии \*).

По сравнению с этой главой добавлено много новых задач, некоторые из них довольно трудны. В то же время, учитывая опыт Заочной математической школы при МГУ, автор дал решения многих задач в более понятной для школьников форме, добавил разъяснения и замечания к тем вопросам, которые вызвали наибольшие затруднения у учеников ЗМШ.

Задачи и теоремы, входящие в школьную программу, составляют лишь небольшую часть книжки. Поэтому она выходит в дополнительной серии «Библиотечки физико-математической школы». Однако для тех школьников, которые хотят в дальнейшем овладеть высшей математикой, будет очень полезно проработать книжку в полном объеме.

При составлении книги автор широко пользовался «математическим фольклором» и советами своих товарищей — студентов, аспирантов и преподавателей механико-математического факультета МГУ. Всем им я выражаю свою благодарность.

Особенно я хочу поблагодарить Н. Б. Васильева, Н. Я. Виленкина, Э. Б. Винберга, В. Л. Гутенмахера, Е. Б. Дынкина, Н. Н. Константинова, С. В. Овчинникова.

При подготовке нового издания большую помощь автору оказали бывшие ученики ЗМШ студенты механико-математического факультета МГУ Ф. Сурков и С. Соболев.

*Автор*

---

\*) С. И. Гельфанд и др., Задачи по элементарной математике (Последовательности, комбинаторика, пределы), «Наука», 1965.

## ЗАДАЧИ

---

### § 1. Подготовительные задачи

Напомним еще раз, что цель этого параграфа — приучить вас к точному выражению своих мыслей, к аккуратным формулировкам. Разберем в качестве примера такую задачу.

Между двумя школьниками *А* и *В*, которые увлекаются решением логических задач, произошел следующий разговор:

*А*: Я купил три полки для книг и расставил на них все свои учебники. Когда я сосчитал, сколько книг стоит на каждой полке, и перемножил эти три числа, получилось 72. Ты ведь знаешь, сколько у меня учебников?

*В*: Да, знаю.

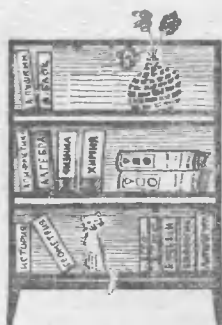
*А*: Тогда скажи, сколько книг стоит на каждой полке?

*В*: У меня не хватает данных.

*А*: Полка, где было меньше всего книг, выглядела хуже остальных, и я поставил туда вазу с цветами.

*В*: Теперь мне все ясно, вот ответ... И *В* точно сказал, сколько книг стоит на каждой полке.

Как вы думаете, сколько у *А* учебников и как он их расставил по полкам?





На первый взгляд эта задача напоминает известный вопрос хравого солдата Швейка:

«В доме 4 этажа; в каком году умерла бабушка швейцара?». На самом же деле она имеет строгое, вполне определенное решение. Прежде чем читать дальше, попытайтесь найти это решение самостоятельно.

Решение. В условии задачи сказано: «Когда я сосчитал, сколько книг стоит на каждой полке, и перемножил эти три числа, получилось 72. Рассмотрим всевозможные способы записать 72 в виде произведения трех сомножителей. Сумма этих сомножителей будет тогда равна возможному числу учебников у А.

Сомножители	Сумма сомножителей
1, 1, 72	$1 + 1 + 72 = 74$
1, 2, 36	$1 + 2 + 36 = 39$
1, 3, 24	$1 + 3 + 24 = 28$
1, 4, 18	$1 + 4 + 18 = 23$
1, 6, 12	$1 + 6 + 12 = 19$
1, 8, 9	$1 + 8 + 9 = 18$
2, 2, 18	$2 + 2 + 18 = 22$
2, 3, 12	$2 + 3 + 12 = 17$
2, 4, 9	$2 + 4 + 9 = 15$
2, 6, 6	$2 + 6 + 6 = 14$
3, 3, 8	$3 + 3 + 8 = 14$
3, 4, 6	$3 + 4 + 6 = 13$

Школьник В знал, сколько у А учебников, но не смог сразу ответить, как тот распределил их по полкам. Если бы он знал, например, что у А 15 учебников, он сразу бы ответил, что на одной полке 2 учебника, на другой 4, а на третьей 9 (так как сумме 15 соответствует только одна тройка сомножителей, дающих в произведении 72).

Очевидно, В не смог сразу дать ответ потому, что известное ему количество

книг можно по-разному разбить на три числа, дающие в произведении 72. Из таблицы видно, что этим свойством обладает только число 14. Итак, мы установили, что у А 14 учебников.

Он мог расставить их по полкам двумя способами: 2, 6, 6 или 3, 3, 8. Воспользуемся теперь последней фразой А, которая, казалось бы, не дает никакой информации: «Полка, где было меньше всего книг, выглядела хуже остальных, и я поставил туда вазу с цветами». Из этой фразы ясно, что имеется лишь одна полка, на которой стоит наименьшее число учебников. Поэтому случай 3, 3, 8 нам не подходит.

Ответ. Два учебника стоят на полке с вазой и по шесть учебников на остальных полках.

Уже на этом шуточном примере видно, как важно разобраться в условии задачи и полностью его использовать. Перейдем теперь к другим задачам.

1. Двум школьникам поручили вести календарь погоды. Они должны отмечать день знаком  $+$ , если погода хорошая, и знаком  $-$ , если погода плохая. Первый школьник поступал так. Он делал наблюдения три раза в сутки — утром, днем и вечером. Если хотя бы во время одного наблюдения шел дождь, он ставил отметку  $-$ . В остальных случаях он ставил  $+$ . Второй школьник делал наблюдения в то же время, что и первый. Если хотя бы во время одного наблюдения дождя не было, он ставил  $+$ . В остальных случаях он ставил  $-$ . Таким образом, каждый день погода могла получить одну из оценок:  $++$ ;  $+-$ ;  $-+$ ;  $--$ . Все ли эти оценки на самом деле могут встретиться?

2. К двум школьникам из задачи 1 присоединился третий, который делает наблюдения в то же время, что и первые два, и ставит  $-$ , если по крайней мере во



время двух наблюдений шел дождь, и  $+$  в остальных случаях. Какие из восьми оценок  $+++; ++-; +-+; -++; -+-; --+; +--; ---$  могут на самом деле встретиться?

3. а) Триста человек построены в 30 шеренг и 10 рядов. Из каждой шеренги выбрали самого высокого человека, а из этих 30 человек выбрали самого низкого. Потом из каждого ряда выбрали самого низкого человека, а из этих 10 человек — самого высокого. Кто окажется выше: самый высокий из низких, или самый низкий из высоких?

б) Изменится ли ответ, если построить людей не прямоугольником, а углом, как, например, на рис. 1?

4. Некоторое количество яблок нужно разделить между двумя школьниками. Известно, что первый будет доволен, если ему достанется по крайней мере 2 яблока, а второй, — получив не меньше 3 яблок.

Могут возникнуть 4 ситуации:

а) первый доволен, второй недоволен  $(+, -)$ ,

б) первый недоволен, второй доволен  $(-, +)$ ,

в) оба довольны  $(+, +)$ ,

г) оба недовольны  $(-, -)$ .

Какие из этих возможностей могут представиться, если всего имеется:

1) 2 яблока; 2) 3 яблока; 3) 4 яблока; 4) больше 5 яблок?

Рассмотрим несколько утверждений:

A. Число  $n^3 - n$  делится на 12.

B. Сумма углов треугольника ABC равна  $180^\circ$ .

C. Уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  не имеет вещественных решений.

D. Число  $n$  четно и не делится на 4.

Условимся чертой над буквой обозначать отрицание утверждения. Например,



Рис. 1.

$\bar{A}$  означает: «Число  $n^3 - n$  не делится на 12»,  $\bar{B}$  — «Сумма углов треугольника  $ABC$  не равна  $180^\circ$ »,  $\bar{C}$  — «Уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет хотя бы одно вещественное решение». Попробуйте самостоятельно сформулировать утверждение  $\bar{D}$ .

(Ответ. Число  $n$  нечетно или делится на 4.)

Не всегда легко формулировать отрицание некоторого утверждения. Рассмотрим пример.

Контрольная работа называется легкой, если на *каждой* парте найдется ученик, который решил *все* задачи.

Попробуем сказать, что называется трудной (точнее говоря, нелегкой) контрольной.

Контрольная называется трудной, если *не на каждой* парте найдется ученик, который бы решил *все* задачи.

Это значит, что

найдется парта, на которой нет ученика, который бы решил все задачи,

или

найдется парта, на которой каждый ученик не решил хотя бы одну задачу.

Два утверждения называются *эквивалентными*, если всякий раз, когда верно одно из них, верно и другое.

Покажем, например, что рассмотренные выше утверждения  $A$  и  $\bar{D}$  эквивалентны.

В самом деле, число  $n^3 - n$  можно записать в виде произведения трех последовательных чисел  $n - 1$ ,  $n$ ,  $n + 1$ . Одно из этих чисел делится на 3 и по крайней мере одно четно. Поэтому произведение всегда делится на 6. Посмотрим, когда оно делится на 12 (т. е. когда верно утверждение  $A$ ). Это возможно, либо когда два сомножителя — четные числа, либо



когда единственный четный сомножитель делится на 4.

Ясно, что числа  $n - 1$  и  $n + 1$  имеют одинаковую четность. Поэтому два четных сомножителя бывают в случае нечетного  $n$ , а один четный сомножитель — в случае четного  $n$ . Значит,  $n^3 - n$  делится на 12, когда  $n$  либо нечетно, либо делится на 4. Таким образом,  $A$  эквивалентно  $\bar{D}$ .

5. Рассмотрим два определения легкой контрольной:

а) В каждом варианте каждую задачу решил хотя бы один ученик.

б) В каждом варианте хотя бы один ученик решил все задачи.

Может ли контрольная быть легкой в смысле определения а) и трудной в смысле определения б)?

6. Какие из следующих утверждений являются отрицаниями друг друга?

1) В каждом классе хотя бы один ученик — отличник.

2) Ни в одном классе нет отличников.

3) Есть класс, в котором нет отличников.

4) В одном из классов есть отличник.

Обычно математические теоремы формулируют в следующем виде:

Если  $A$ , то  $B$ ,

где  $A$  и  $B$  означают какие-нибудь утверждения. Утверждение  $A$  называется *условием* теоремы, а утверждение  $B$  — *заключением*.

Например: «Если число  $n$  делится на 3, то и сумма цифр числа  $n$  делится на 3».

Иногда теоремы формулируются по-другому, например:

«Не существует наибольшего простого числа» (Евклид).

Но на самом деле всякую теорему можно заменить эквивалентной теоремой,



имеющей вид «Если  $A$ , то  $B$ ». В теореме Евклида это выглядит так:

Если  $p$  — простое число, то найдется такое простое число  $q$ , что  $p < q$ .

Отметим, что сам Евклид свою теорему формулировал так: «Простых чисел имеется больше, чем любое число их». Это можно пересказать так: если  $p_1, \dots, p_n$  — любой конечный набор простых чисел, то найдется простое число  $q$ , не входящее в этот набор.



Предположим, что мы составили теорему: «Если  $A$ , то  $B$ ». Назовем ее теоремой I или *прямой* теоремой. Тогда теорема II «Если  $B$ , то  $A$ » называется *обратной* теоремой (в ней условие и заключение поменялись местами). Теорема III «Если  $\bar{A}$ , то  $\bar{B}$ » называется *противоположной* (по отношению к теореме I). Теорема IV «Если  $\bar{B}$ , то  $\bar{A}$ » является *противоположной обратной* (и в то же время *обратной противоположной*) к теореме I.

Напомним, что теорема считается верной, если ее заключение верно во всех случаях, когда выполняется условие. Теорема неверна, если найдется хотя бы один случай, когда условие выполняется, а заключение нет. Поэтому проверка одного или нескольких частных случаев может оказаться достаточной, чтобы опровергнуть теорему. Но такая проверка недостаточна для доказательства теоремы.



7. Какие из следующих теорем верны?

1) Если каждое слагаемое делится на 7, то и сумма делится на 7.

2) Если каждое слагаемое не делится на 7, то и сумма не делится на 7.

3) Если хотя бы одно слагаемое делится на 7, то и сумма делится на 7.

4) Если сумма делится на 7, то и каждое слагаемое делится на 7.

5) Если сумма не делится на 7, то и каждое слагаемое не делится на 7.

6) Если сумма не делится на 7, то хотя бы одно слагаемое не делится на 7.

8. Дан треугольник со сторонами 5, 12, 13.

а) Верно ли, что он прямоугольный?

б) Следует ли это из теоремы Пифагора?

9°. а) Докажите, что для любой прямой теоремы I обратная теорема II и противоположная теорема III эквивалентны между собой.

б) Докажите, что всякая прямая теорема I эквивалентна обратной противоположной теореме IV.

10\*. Пусть **A** и **B** означают какие-нибудь два утверждения (рис. 2). Рассмотрим восемь теорем:

- |  |  |
|--|--|
| 1. Если <b>A</b> , то <b>B</b> .                 | 5. Если <b>B</b> , то <b>A</b> .                 |
| 2. » $\bar{\mathbf{A}}$ , » <b>B</b> .           | 6. » $\bar{\mathbf{B}}$ , » <b>A</b> .           |
| 3. » $\bar{\mathbf{A}}$ , » $\bar{\mathbf{B}}$ . | 7. » <b>B</b> , » $\bar{\mathbf{A}}$ .           |
| 4. » $\bar{\mathbf{A}}$ , » $\bar{\mathbf{B}}$ . | 8. » $\bar{\mathbf{B}}$ , » $\bar{\mathbf{A}}$ . |

Известно, что теорема 1 верна. Требуется разбить остальные теоремы на три группы: в первую группу отнести теоремы, которые заведомо верны, во вторую — теоремы, которые заведомо неверны, в третью — теоремы, которые могут быть верными, а могут быть и неверными. Условимся при этом не рассматривать в качестве **A** и **B** утверждений, которые всегда неверны, и утверждений, которые всегда верны. (Например, «В треугольнике *ABC* все углы прямые» или «В треугольнике *ABC* три медианы пересекаются в одной точке».)

В следующих задачах используется обозначение  $|x|$  (читается «модуль *икс*» или «абсолютная величина *икс*»). Оп-

## СОБЫТИЯ

**A** — дождь идет

$\bar{\mathbf{A}}$  — дождя не идет

**B** — зонт открыт

$\bar{\mathbf{B}}$  — зонт не открыт

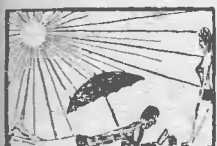
## ТЕОРЕМЫ



Если **A**, то **B**



Если **A**, то  $\bar{\mathbf{B}}$



Если  $\bar{\mathbf{A}}$ , то **B**



Если  $\bar{\mathbf{A}}$ , то  $\bar{\mathbf{B}}$

Рис. 2.

ределяется величина  $|x|$  следующим образом:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$



11. Какие значения может принимать выражение  $\frac{|x|}{x}$ ?

12. Как записать без знака модуля выражения:

- а)  $|a^2|$ ;
- б)  $|a - b|$ , если  $a > b$ ;
- в)  $|a - b|$ , если  $a < b$ ;
- г)  $|-a|$ , если  $a$  отрицательно?



13. Решить уравнения:

- а)  $x + 2|x| = 3$ ;
- б)  $x^2 + 3|x| - 4 = 0$ ;
- в)  $|2x + 1| + |2x - 1| = 2$ .

14. Докажите неравенства:

- а)  $|x + y| \leq |x| + |y|$ ;
- б)  $|x - y| \geq ||x| - |y||$ ;
- в)  $|x - y| \geq ||x| - |y||$ .



Выясните в каждом из этих случаев, когда неравенство превращается в равенство.

15. Верно ли, что существует такое натуральное число  $n$ , для которого:

- а)  $\sqrt[n]{1000} < 1,001$ ?
- б)\*  $\sqrt[n]{n} < 1,001$ ?
- в)  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0,1$ ?
- г)  $\sqrt{n^2 + n} - n < 0,1$ ?

16. а)° Верно ли, что существует такое число  $C$ , что при всех целых  $k$  выполняется неравенство

$$\left| \frac{k^3 - 2k + 1}{k^4 - 3} \right| < C?$$





б)\* Верно ли, что для любого числа  $C$  существует бесконечное множество целых чисел  $k$ , для которых выполняется неравенство

$$k \sin k > C?$$

17. а) Стороны прямоугольника измерены с точностью до 1 см. С какой точностью можно вычислить периметр и площадь прямоугольника?

б) Стороны прямоугольника измерены с точностью до 1%. С какой точностью можно вычислить периметр и площадь прямоугольника?



Будем говорить, что задана последовательность чисел

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

если каждому натуральному\*)  $n$  поставлено в соответствие некоторое число  $x_n$ .

Формула, задающая  $x_n$ , называется *формулой общего члена* последовательности.

Например, последовательность

$$1; 4; 9; 16; 25; \dots$$

можно задать формулой  $x_n = n^2$ , а последовательность

$$-1; 1; -1; 1; -1; 1; \dots$$

формулой  $x_n = (-1)^n$  или формулой  $x_n = \cos \pi n$ . Конечно, не всякую последовательность можно задать алгебраической формулой. (В качестве примера приведем последовательность

$$3; 1; 4; 1; 5; 9; 2; 6; 5; \dots,$$

в которой член  $x_n$  равен  $n$ -й цифре десятичной записи числа  $\pi$ .)

---

\*) *Натуральными* называются целые положительные числа.

18. Найти наибольший член следующих последовательностей:

а)  $x_n = \frac{n^2}{2^n}$ ;

б)  $x_n = \frac{n}{100 + n^2}$ ;

в)  $x_n = \frac{1000^n}{n!}$  \*).

19. Найти наименьший член следующих последовательностей:

а)  $x_n = n^2 - 5n + 1$ ;

б)  $x_n = n + \frac{100}{n}$ ;

в)  $x_n = n + 5 \sin \frac{\pi n}{2}$ .

Последовательность  $\{x_n\}$  \*\*) называется *ограниченной*, если существует такое число  $C$ , что для любого номера  $n$  выполняется неравенство  $|x_n| \leq C$  (рис. 3).



20. Сформулируйте определение неограниченной последовательности.

21. Придумайте ограниченную последовательность, которая

а) имеет и наибольший и наименьший член;

б) имеет наибольший, но не имеет наименьшего члена;

в) имеет наименьший, но не имеет наибольшего члена;

г) не имеет ни наименьшего, ни наибольшего члена.



Рис. 3.

Пусть дана бесконечная последовательность  $\{x_n\}$ . Можно изображать члены этой последовательности точками на числовой оси (при этом может оказаться, конечно, что несколько членов

\*)  $n!$  — сокращенное обозначение произведения  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ; по определению  $1! = 1$ .

\*\*) Символом  $\{x_n\}$  кратко обозначается последовательность  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

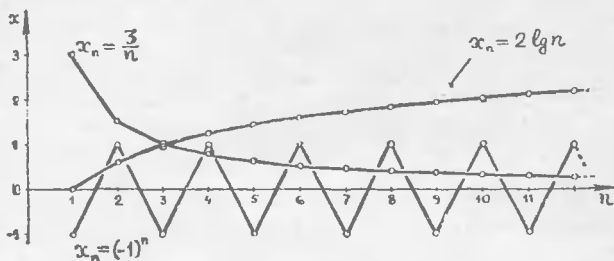


Рис. 4.

последовательности попадут в одну и ту же точку; например, в последовательности  $1; \frac{1}{2}; 1; \frac{1}{3}; 1; \frac{1}{4}; \dots$  все члены с нечетным номером попадут в точку 1).

Более удобно представлять себе последовательность  $\{x_n\}$  следующим образом: на плоскости с заданной системой координат отметим точки:

$$(1, x_1), (2, x_2), (3, x_3), \dots, (n, x_n), \dots$$

Это множество точек назовем *графиком последовательности*. Для наглядности можно соединить эти точки ломаной линией (см. рис. 4). Ясно, что каждая последовательность полностью определяется своим графиком.

Все свойства последовательностей можно пересказать на языке графиков. Например, если последовательность имеет максимальный (или минимальный) член, то это значит, что на графике этой последовательности есть самая высокая (или самая низкая) точка. Ограниченность последовательности означает, что ее график целиком лежит в некоторой полосе, параллельной оси абсцисс (см. рис. 5).

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется для почти всей последовательности, если оно выполняется для всех членов этой последовательности, за исключением, быть может, конечного числа членов.

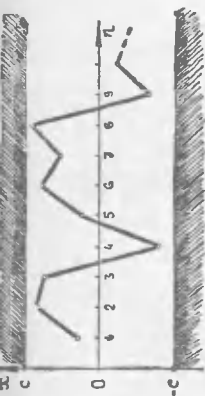


Рис. 5.



Нужно ясно представлять себе значение слов «почти все члены последовательности».

Например, можно сказать, что почти все члены последовательности

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

больше 1 000 000, однако неверно, что почти все они четны.

22°. Пусть известно, что последовательность  $\{x_n\}$  почти вся лежит в отрезке  $[0, 1]$ . Какие из следующих утверждений всегда истинны, какие всегда ложны, а какие могут быть и истинными и ложными?

а)  $\{x_n\}$  вся лежит в отрезке  $[-100, 100]$ ;

б)  $\{x_n\}$  почти вся лежит в отрезке  $[0, 2]$ ;

в)  $\{x_n\}$  почти вся лежит в отрезке  $[0, 5, 1, 5]$ ;

г)  $\{x_n\}$  почти вся лежит в отрезке  $[2, 3]$ ;

д) в отрезке  $[2, 3]$  лежит бесконечно много членов последовательности;

е)  $\{x_n\}$  ограничена.

Предположим, что некоторое свойство выполняется для почти всех членов последовательности  $\{x_n\}$ . Тогда это свойство не выполняется только для конечного числа ее членов. Пусть  $n_1, n_2, \dots, n_k$  — номера этих членов, и пусть  $n_p$  — наибольший из этих номеров. Тогда данное свойство выполняется для всех членов последовательности, начиная с члена с номером  $n_p + 1$ . Таким образом, сказать «почти все члены последовательности обладают каким-нибудь свойством» — это все равно, что сказать «все члены последовательности, начиная с некоторого номера, обладают этим свойством».

23°. Докажите, что последовательность  $x_n = \frac{10n}{n^2 + 1}$  почти вся лежит в



отрезке  $[-0,001; 0,001]$ . Укажите номер, начиная с которого все члены последовательности лежат в заданном отрезке.

24. Существует ли такая последовательность целых чисел, что для любого целого числа  $N$  верно утверждение: «почти все члены последовательности делятся на  $N$ »?

Назовем отрезок  $[a, b]$  на числовой оси *ловушкой* для последовательности  $\{x_n\}$ , если почти вся последовательность лежит в этом отрезке. Назовем отрезок  $[a, b]$  *кормушкой* для последовательности  $\{x_n\}$ , если на этом отрезке лежит бесконечно много членов последовательности.

25°. а) Докажите, что всякая ловушка является кормушкой.

б) Придумайте пример кормушки, которая не является ловушкой.

26. а)° Существует ли последовательность, не имеющая ни одной кормушки?

б)\* Существует ли последовательность, для которой всякий отрезок является кормушкой?

27°. Известно, что для некоторой последовательности каждый из отрезков  $[0, 1]$  и  $[9, 10]$  является кормушкой.

Существует ли для этой последовательности

а) ловушка длины 1?

б) ловушка длины 9?

## § 2. Задачи, связанные с определением предела

Рассмотрим график последовательности  $x_n = \frac{1}{n}$  (см. рис. 6). Мы видим, что этот график неограниченно приближается к оси абсцисс, стремится к ней.

Слова «неограниченно приближается» и «стремится» понятны каждому, пока речь идет о наглядных свойствах гра-



Рис. 6.

фика. Однако, чтобы использовать их в математических рассуждениях и вычислениях, такого понимания недостаточно. Мы должны точно сформулировать, что означают эти выражения на языке чисел. Это приводит нас к одному из самых важных понятий, используемых в математике, — к понятию предела.

Дадим сначала точное определение предела в той форме, в какой оно обычно встречается в учебниках.

Число  $a$  называется *пределом последовательности*  $\{x_n\}$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  (греческая буква «эпсилон») найдется такое число  $k$ , что для всех номеров  $n$ , больших  $k$ , выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Тот факт, что число  $a$  является пределом последовательности  $\{x_n\}$  записывают так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

(читается: «предел  $x_n$  при  $n$ , стремящемся к бесконечности, равен  $a$ »), или так:

$$x_n \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow \infty$$

(читается: « $x_n$  стремится к  $a$  при  $n$ , стремящемся к бесконечности»).

Сделаем теперь несколько замечаний по поводу определения предела.

1) Рассмотрим график последовательности  $\{x_n\}$ . Какое свойство этого графика выражается равенством  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ?

Проведем горизонтальную прямую  $x = a$  и построим полоску ширины  $2\varepsilon$ , окружающую эту прямую (см. рис. 7). Неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$  означает, что точка  $(n, x_n)$  находится внутри построенной полоски. Таким образом, если последовательность  $\{x_n\}$  стремится к  $a$ , то почти

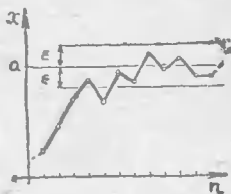


Рис. 7.

весь график последовательности лежит внутри указанной полосы.

Так как в определении предела число  $\varepsilon$  может быть любым, сколь угодно малым, описанное свойство графика сохраняется для любой, сколь угодно узкой полосы. Итак, определение предела может быть пересказано следующим образом.

Число  $a$  называется *пределом последовательности*  $\{x_n\}$ , если почти весь график этой последовательности лежит внутри сколь угодно узкой полосы, окружающей прямую  $x = a$ .

2) Наглядное представление о пределе можно получить, если предположить, что члены последовательности — какие-то физические величины, и мы можем измерить их только с определенной точностью, которую допускают наши приборы.

Обозначим через  $\varepsilon$  наименьшую величину, различаемую прибором. Неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$  означает, что мы не сможем отличить  $x_n$  от  $a$ .

Таким образом, условие  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

означает, что *при любой* точности измерения последовательность  $\{x_n\}$ , начиная с некоторого места, не отличается от постоянной последовательности  $a, a, a, \dots$

3) В определении предела участвует число  $k$ . Часто это число предполагают натуральным. Мы не будем делать такого предположения. Число  $k$  может у нас быть любым действительным числом. Это удобнее для доказательства существования предела (см., например, решение задачи 32) и в то же время не меняет смысла определения. Можно было бы вообще не вводить числа  $k$ , а сказать, что неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$  выполняется для почти всех членов последовательности (ср. замечание на стр. 19).

28. Даны последовательности:

а)  $x_n = \frac{1}{n}$ ;

б)  $x_n = \frac{1}{n^2 + 1}$ ;

в)  $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ;

г)  $x_n = \log_n 2$ .

В каждом из этих случаев укажите такое число  $k$ , чтобы при  $n > k$  выполнялись неравенства:

А)  $|x_n| < 1$ ,

Б)  $|x_n| < 0,001$ ,

В)  $|x_n| < 0,000\,001$ .

29°. а) Докажите, что если  $x_n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ , то любой отрезок с центром в точке  $a$  является ловушкой для последовательности  $\{x_n\}$ .

б) Верно ли обратное утверждение?

30\*. а) Докажите, что если  $x_n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ , то каждый отрезок с центром в точке  $a$  является кормушкой, а никакой отрезок, не содержащий точки  $a$ , не является кормушкой для последовательности  $\{x_n\}$ .

б) Известно, что для некоторой последовательности  $\{x_n\}$  любой отрезок с центром в точке  $a$  является кормушкой, а никакой отрезок, не содержащий точки  $a$ , не является кормушкой. Можно ли утверждать, что  $x_n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ ?

31°. Докажите, что если некоторый отрезок является кормушкой для последовательности  $\{x_n\}$ , то никакое число, лежащее вне этого отрезка, не может быть пределом последовательности  $\{x_n\}$ .

32. Какие из следующих последовательностей имеют пределы?

а)  $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4}; \dots; \frac{(-1)^{n-1}}{n}; \dots;$

б)  $\frac{2}{3}; \frac{8}{9}; \frac{26}{27}; \dots; \frac{3^n - 1}{3^n}; \dots;$





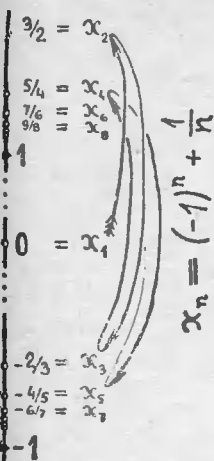


Рис 8



- в)  $1; 1 + \frac{1}{2}; 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}; \dots$   
 г)  $1; 2; 3; 4; \dots$   
 д)  $1; 1; 1; 1; \dots; 1; \dots$   
 е)  $0; 1; 0, \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{3}; \dots; 0, \frac{1}{n}; \dots$   
 ж)  $0,2; 0,22; 0,222; \dots, 0,22 \dots 2; \dots$   
 з)  $\sin 1^\circ; \sin 2^\circ; \sin 3^\circ; \dots; \sin n^\circ; \dots$   
 и)  $\frac{\cos 1^\circ}{1}; \frac{\cos 2^\circ}{2}; \frac{\cos 3^\circ}{3}; \dots; \frac{\cos n^\circ}{n}; \dots$   
 к)  $0, 1 \frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; \dots; (-1)^n + \frac{1}{n}; \dots$

(рис. 8).

33. Могут ли два разных числа быть пределами одной и той же последовательности?

34°. Число  $a$  называется *предельной точкой последовательности*  $\{x_n\}$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  и любого числа  $k$  найдется такой номер

$$n > k,$$

для которого выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

а) Докажите, что если  $a$  — предельная точка последовательности  $\{x_n\}$ , то любой отрезок с центром в точке  $a$  является кормушкой для последовательности  $\{x_n\}$ .

б) Докажите обратную теорему.

35°. Докажите, что предел последовательности (если он существует) является предельной точкой.

36°. Для каждой из следующих последовательностей укажите все ее предельные точки:

а)  $x_n = \frac{n+1}{n};$

б)  $x_n = (-1)^n;$

в)  $x_n = \sin n^\circ$ ;

г)  $x_n = n^{(-1)^n}$ ;

д)  $x_n = n$ ;

е)  $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{3}{4}; \dots$

37. а) Докажите, что если последовательность имеет предел, то она ограничена.

б) Верно ли обратное утверждение?

38. Говорят, что последовательность  $\{x_n\}$  стремится к бесконечности (это записывают так: « $x_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ »), если для любого числа  $C$  найдется такое число  $k$ , что для всех номеров  $n > k$  выполняется неравенство (рис. 9)

$$|x_n| > C.$$

Отметим, что последовательность, стремящаяся к бесконечности, не имеет предела в смысле определения, данного в начале этого параграфа.

Какие из следующих последовательностей стремятся к бесконечности и какие не ограничены:

а)  $x_n = n$ ;

б)  $x_n = n \cdot (-1)^n$ ;

в)  $x_n = n^{(-1)^n}$ ;

г)  $x_n = \begin{cases} n & \text{при } n \text{ четном,} \\ \sqrt{n} & \text{при } n \text{ нечетном;} \end{cases}$

д)  $x_n = \frac{100n}{100 + n^2}$ .

39\*. Рассмотрим следующие 16 условий (буква «л» означает «для любого», буква «н» — найдется такое..., что):

1.  $\forall \varepsilon > 0 \exists k \forall n > k |x_n - a| < \varepsilon$ .

2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists k \forall n > k |x_n - a| \geq \varepsilon$ .

3.  $\forall \varepsilon > 0 \exists k \text{ л } \forall n > k |x_n - a| < \varepsilon$ .

4.  $\forall \varepsilon > 0 \exists k \text{ л } \forall n > k |x_n - a| \geq \varepsilon$ .

5.  $\forall \varepsilon > 0 \text{ л } \exists k \forall n > k |x_n - a| < \varepsilon$ .

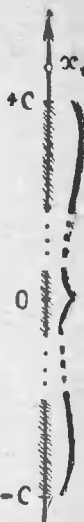


Рис. 9.



6.  $n \in > 0 \text{ л } k \text{ н } n > k \mid x_n - a \mid \geq \varepsilon.$
7.  $n \in > 0 \text{ л } k \text{ л } n > k \mid x_n - a \mid < \varepsilon.$
8.  $n \in > 0 \text{ л } k \text{ л } n > k \mid x_n - a \mid \geq \varepsilon.$
9.  $л \in > 0 \text{ н } k \text{ н } n > k \mid x_n - a \mid < \varepsilon.$
10.  $л \in > 0 \text{ н } k \text{ н } n > k \mid x_n - a \mid \geq \varepsilon.$
11.  $л \in > 0 \text{ н } k \text{ л } n > k \mid x_n - a \mid < \varepsilon.$
12.  $л \in > 0 \text{ н } k \text{ л } n > k \mid x_n - a \mid \geq \varepsilon.$
13.  $л \in > 0 \text{ л } k \text{ н } n > k \mid x_n - a \mid < \varepsilon.$
14.  $л \in > 0 \text{ л } k \text{ н } n > k \mid x_n - a \mid \geq \varepsilon.$
15.  $л \in > 0 \text{ л } k \text{ л } n > k \mid x_n - a \mid < \varepsilon.$
16.  $л \in > 0 \text{ л } k \text{ л } n > k \mid x_n - a \mid \geq \varepsilon.$

Какие из этих условий выражают уже знакомые вам свойства последовательностей (быть ограниченной, иметь число  $a$  пределом, иметь число  $a$  предельной точкой, стремиться к бесконечности) или отрицания этих свойств?

40\*. Рассмотрим следующие пять свойств последовательностей: 1) тождественно равняться  $a$ , 2) иметь число  $a$  пределом, 3) иметь число  $a$  предельной точкой, 4) быть ограниченной, 5) стремиться к бесконечности.

Каждую последовательность можно охарактеризовать набором из пяти знаков плюс или минус. Например, набор  $-+++$  означает, что последовательность обладает свойствами 2, 3, 4 и не обладает свойствами 1, 5. Некоторые наборы не имеют смысла (так, набор  $++++$ : если последовательность обладает свойством 1, она не может обладать свойством 5).

а) Укажите все наборы, имеющие смысл. Для каждого из них постройте последовательность, характеризруемую этим набором.

б) Докажите, что остальные наборы не имеют смысла.

41°. Докажите, что если последовательность имеет предел, то в ней есть или

наибольший член, или наименьший член, или и тот и другой. Приведите примеры всех трех случаев.

Последовательность  $\{x_n\}$  называется *монотонной*, если выполняется одно из следующих условий:

- 1)  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$ ;
- 2)  $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$

В первом случае последовательность называют *неубывающей*, во втором случае — *невозрастающей*.

42°. Докажите, что из любой бесконечной последовательности можно выбрать бесконечную монотонную подпоследовательность.

43. Пусть  $\alpha$  — бесконечная десятичная дробь. Рассмотрим последовательность  $\{x_n\}$ , в которой член  $x_n$  равен  $n$ -й цифре после запятой в десятичной записи числа  $\alpha$ . Докажите, что если  $\{x_n\}$  монотонна, то  $\alpha$  — рациональное число.

В теории пределов очень важно одно свойство вещественных чисел, которое обычно принимают за аксиому.

**Аксиома Больцано — Вейерштрасса:**

*Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

Эта аксиома отражает свойство полноты совокупности вещественных чисел. Образно говоря, она состоит в том, что на числовой оси нет «проколов» и «дырок».

В курсе математического анализа доказывается, что аксиома Больцано — Вейерштрасса равносильна каждому из следующих утверждений.

1. Если на числовой оси построена бесконечная последовательность отрезков, так что каждый следующий отрезок лежит внутри предыдущего, то все эти





отрезки имеют по крайней мере одну общую точку.

2. Всякое вещественное число можно записать в виде бесконечной (периодической или непериодической) десятичной дроби, и каждой такой дроби соответствует некоторое вещественное число.

Если одно из этих утверждений принять за аксиому, то второе утверждение и аксиома Больцано — Вейерштрасса станут теоремами, которые можно доказать.

Аксиома Больцано — Вейерштрасса обеспечивает только существование предела и ничего не говорит о его величине. Однако иногда достаточно знать, что предел существует, чтобы его найти. Вот пример.

Рассмотрим последовательность

$$x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}, x_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$$

Для этой последовательности справедливо равенство

$$x_{n+1}^2 = 2x_n.$$

Если последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел  $a$ , то левая часть равенства стремится к  $a^2$ , а правая — к  $2a$ . Мы получаем равенство  $a^2 = 2a$ , откуда  $a = 0$  или  $a = 2$ .

Проверьте самостоятельно, что число 0 не является пределом последовательности  $\{x_n\}$ . Значит, если предел существует, то он равен 2.

Для доказательства существования применим аксиому Больцано — Вейерштрасса. В самом деле, можно доказать по индукции, что при любом  $n$

$$x_n < x_{n+1} < 2.$$

Поэтому последовательность  $\{x_n\}$  монотонна и ограничена.

Рассмотрим еще один пример:

$$x_1 = 1, x_2 = 1 - 1, x_3 = 1 - 1 + 1, \\ x_4 = 1 - 1 + 1 - 1, \dots$$



Ясно, что для этой последовательности выполняется равенство

$$x_{n+1} = 1 - x_n.$$

Обозначим предел последовательности  $\{x_n\}$  через  $a$ . Тогда должно выполняться равенство  $a = 1 - a$ , откуда  $a = 1/2$ .

На самом деле, конечно, число  $1/2$  не является пределом  $\{x_n\}$  (убедитесь в этом самостоятельно, положив  $\varepsilon = 1/2$  в определении предела). Неверный ответ получился здесь потому, что мы «вычислили» предел, еще не зная, существует ли он. Равенство  $a = 1/2$  правильно понимать так: если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  существует, то он равен  $1/2$ .

44°. Последовательность  $\{x_n\}$  строится по следующему закону:

$$x_1 = 1/2, \quad x_2 = x_1 - x_1^2, \quad x_3 = x_2 - x_2^2,$$

$$x_4 = x_3 - x_3^2, \dots$$

Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  существует, и найдите его.

45\*. Докажите, что аксиома Больцано — Вейерштрасса не выполняется, если рассматривать только рациональные числа (т. е. существуют монотонные ограниченные последовательности рациональных чисел, которые не имеют рационального предела).

46°. Докажите, что всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы одну предельную точку.

47°. Известно, что последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел  $a$ , а последовательность  $\{y_n\}$  — предел  $b$ . Верно ли, что имеют предел следующие последовательности:

а)  $\{x_n + y_n\}$ ;   б)  $\{x_n - y_n\}$ ;

в)  $\{x_n \cdot y_n\}$ ;   г)  $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ ?





Рис. 10.

48. Известно, что последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел, а последовательность  $\{y_n\}$  — не имеет.

Имеют ли пределы последовательности

а)  $\{x_n + y_n\}$ ; б)  $\{x_n \cdot y_n\}$ ?

49. Известно, что последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  не имеют предела. Могут ли иметь предел последовательности

а)  $\{x_n + y_n\}$ ; б)  $\{x_n \cdot y_n\}$ ?

50. («Теорема о двух милиционерах») Известно, что последовательность  $\{x_n\}$  заключена между последовательностями  $\{y_n\}$  и  $\{z_n\}$ , т. е. при всех  $n$  выполняется неравенство  $y_n \leq x_n \leq z_n$  (рис. 10). Докажите, что если последовательности  $\{y_n\}$  и  $\{z_n\}$  имеют один и тот же предел  $a$ , то и последовательность  $\{x_n\}$  стремится к  $a$ .

Сумма бесконечного ряда чисел определяется следующим образом. Пусть дан ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$



Обозначим через  $S_n$  сумму первых  $n$  слагаемых этого ряда (ее называют  $n$ -й *частичной суммой ряда*). Если последовательность  $\{S_n\}$  имеет предел  $S$ , то число  $S$  называют *суммой данного ряда*. Сам ряд в этом случае называется *сходящимся*. Если же последовательность  $S_n$  не имеет предела, то говорят, что заданный ряд *расходится* и не приписывают ему никакой суммы.

51°. Доказать, что следующие ряды сходятся:

а)  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$ ;

б)  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ ;

в)  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \dots$

52°. Докажите, что если ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

53\*. Пусть  $\{a_n\}$  — убывающая последовательность положительных чисел. Докажите, что ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд (рис. 11):

$$a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots + 2^{n-1}a_{2^{n-1}} + \dots$$

54\*. При каких вещественных  $p$  сходится ряд

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots?$$

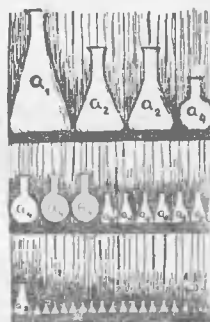
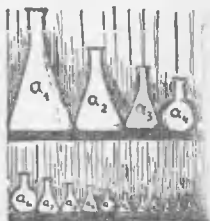


Рис. 11

### § 3. Задачи на вычисление пределов

При вычислении пределов последовательностей часто используются следующие формулы (доказательства их см. в решении задачи 47).

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , то:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$ ;
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = a - b$ ;
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = ab$ ;
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a}{b}$  при  $b \neq 0$ .



Обратите внимание на то, что эти формулы можно применять только в том случае, когда существуют пределы последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$ .



55. Найдите ошибку в следующих рассуждениях:

а) Рассмотрим последовательность  $x_n = \frac{2n-1}{n}$ . С одной стороны,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2,$$

с другой стороны,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1)}{\lim_{n \rightarrow \infty} n} = \frac{\infty}{\infty} = 1.$$

Отсюда  $2 = 1$ !

б) Рассмотрим последовательность  $x_n = 1$ .

С одной стороны, очевидно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

С другой стороны,  $x_n = (n+1) - n$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) - \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty - \infty = 0.$$

Мы получили равенство  $1 = 0$ !

в) Рассмотрим последовательность

$x_n = \frac{n-1}{n}$ . С одной стороны,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (n-1) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (n-1) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда  $0 = 1$ !

56.° Докажите, что если последовательность  $\{x_n\}$  стремится к бесконечности, а последовательность  $\{y_n\}$  имеет конечный предел  $a$ , то:

а) последовательность  $\{x_n + y_n\}$  стремится к бесконечности;

б) последовательность  $\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\}$  стремится к нулю.



в) Что можно сказать о последовательности  $\{x_n \cdot y_n\}$ ?

57. Придумайте последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$ , для которых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

и такие, что:

а)  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ;

б)  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ ;

в)  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ ;

г) последовательность  $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$  не стремится к бесконечности и не имеет конечного предела.

58. Найти пределы последовательностей:

а)  $x_n = \frac{2n+1}{3n-5}$ ; б)  $x_n = \frac{10n}{n^2+1}$ ;

в)  $x_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)}$ ; г)  $x_n = \frac{2^n-1}{2^n+1}$ .

59°. Найти предел последовательности

$$x_n = \frac{1}{n^{k+1}} (1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k)$$

( $k$  — фиксированное натуральное число).

Эта последовательность имеет следующий геометрический смысл. Рассмотрим часть плоскости, ограниченную графиком функции  $y = x^k$ , осью  $Ox$  и прямой  $x = 1$ . Разобьем отрезок  $[0, 1]$  на оси  $Ox$  на  $n$  равных частей и построим на каждой части прямоугольник так, чтобы правая верхняя вершина лежала на графике нашей функции (рис. 12). Сумма площадей всех построенных прямоугольников равна как раз величине

$$x_n = \frac{1}{n^{k+1}} (1^k + 2^k + \dots + n^k).$$

Предел этой величины при  $n \rightarrow \infty$ , по определению, называется *площадью* рассматриваемой криволинейной фигуры.

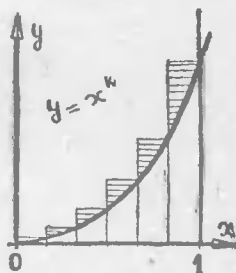


Рис. 12.

60. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = 0.$$

61°. Известно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$  и  $x_n \neq 1$ .

Найдите предел последовательности

$$y_n = \frac{2}{1 - x_n^2} - \frac{1}{1 - x_n}.$$

62°. Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ .

63°. Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$  при  $a > 1$ .

64\*. Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n}{n} = 0$ .

65\*. Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ .

66\*. а) Докажите, что для любого положительного  $a$  последовательность

$x_n = n(\sqrt[n]{a} - 1)$  имеет предел.

б) Обозначим  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1)$  через  $l(a)$ .

Докажите, что

$$l(ab) = l(a) + l(b), \quad l(a^p) = pl(a)$$

для любых положительных  $a$  и  $b$  и любых вещественных  $p$ .

Утверждения задачи 66б) показывают, что выражение  $l(a)$  ведет себя как логарифм числа  $a$ . В самом деле, при любом основании  $c$  справедливы тождества

$$\log_c(ab) = \log_c(a) + \log_c(b),$$

$$\log_c(a^p) = p \log_c(a).$$

Оказывается, это сходство не случайно.

67°. а) Докажите, что отношение  $\frac{l(a)}{\lg a}$  не зависит от  $a$  и, следовательно, равно некоторой постоянной  $M$ .

б) Докажите, что постоянная  $M$  отлична от нуля.

в) Докажите, что существует такое положительное число  $e$ , что  $l(a) = \log_e(a)$ .

Число  $e$ , о котором говорится в задаче 67, встречается почти во всех областях математики. О нем можно было бы написать целую книгу (и такие книги уже существуют). Здесь мы не будем говорить о нем более подробно. Отметим только, что первые в истории математики логарифмы, изобретенные Непером и независимо от него Бюрги, имели в качестве основания число  $e^*$ ). Такие логарифмы называются *натуральными* и обозначаются  $\ln a$ . Постоянная  $M$ , о которой шла речь выше, равна  $\ln 10 = 2,302\,585\dots$ , а само число  $e$  равно  $2,718\,281\,828\dots$ . Приведем еще два выражения для числа  $e$ , позволяющие вычислить его с любой точностью:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

68°. Пусть  $p$  — любое число, отличное от нуля. Назовем *средним  $p$ -го порядка* двух положительных чисел  $a$  и  $b$  выра-

жение  $\sqrt[p]{\frac{a^p + b^p}{2}}$ . Мы будем обозначать это среднее через  $S_p(a, b)$ .

В частности, мы получаем

$$S_1(a, b) = \frac{a+b}{2} \text{ (среднее арифметическое),}$$

$$S_2(a, b) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

(среднее квадратическое),

$$S_{-1}(a, b) = \left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{2}\right)^{-1} = \frac{2ab}{a+b}$$

(среднее гармоническое).

\*) Точнее, один из изобретателей — швейцарец Бюрги (1552—1632) — в качестве основания фактически использовал число  $(1,0001)^{10000}$ , очень близкое к  $e$ . Другой — шотландец Непер (1550—1617) — использовал число  $\left(\frac{1}{0,9999999}\right)^{10000000}$ , которое еще ближе к  $e$ .

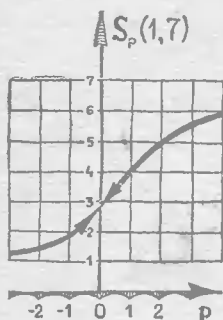


Рис. 13.

На рис. 13 мы изобразили график  $S_p(a, b)$  при  $a = 1, b = 7$ .

а) Докажите, что среднее  $S_p(a, b)$  любого порядка заключено между числами  $a$  и  $b$ .

б) Докажите неравенства

$$S_2(a, b) \geq S_1(a, b) \geq S_{-1}(a, b) \geq S_{-2}(a, b).$$

69°. Найти пределы последовательностей:

а)  $x_n = S_n(a, b);$

б)  $x_n = S_{-n}(a, b);$

в)\*  $x_n = S_{1/n}(a, b)$

(числа  $a$  и  $b$  фиксированы).

70\*. В  $n$  конвертов с адресами наудачу вкладываются  $n$  писем.

а) Какова вероятность того, что ни одно письмо не дойдет до адресата?

б) Докажите, что эта вероятность имеет предел при  $n \rightarrow \infty$ .

(Вероятностью события мы называем отношение числа благоприятных исходов, т. е. исходов, в которых событие происходит, к числу всех возможных исходов. В нашем случае число всех исходов равно числу всех способов размещения писем по конвертам, которое равно  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ . Обозначим через  $a_n$  число способов, при которых ни одно письмо не попадает в свой конверт. Тогда искомую вероятность можно записать в виде  $\frac{a_n}{n!}$ .)

До сих пор мы говорили о пределах числовых последовательностей. Но с помощью чисел можно задавать различные геометрические объекты. Например, направление прямой линии на плоскости можно задать угловым коэффициентом; точку на прямой линии и на плоскости можно задавать ее координатами и т. д.

Во всех случаях, когда термины «предел» или «стремится» применяются к последовательности геометрических объектов, имеются в виду числовые последовательности, характеризующие эти объекты. Так, например, выражение «последовательность точек  $M_n$  на плоскости стремится к точке  $M$ » надо понимать в том смысле, что координаты точек  $M_n$  стремятся к соответствующим координатам точки  $M$ .

71°. Улитка ползет по линиям клетчатой бумаги, передвигаясь за первый шаг на одну клетку вправо, за второй — на одну клетку вверх, за третий — на одну клетку вправо, за четвертый — на одну клетку вверх и т. д. (рис. 14). Вторая улитка сидит на месте и наблюдает за первой в подзорную трубу. Будет ли направление подзорной трубы стремиться к пределу, если первая улитка будет продолжать двигаться описанным образом?

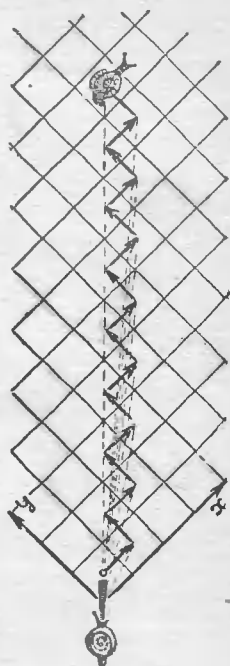


Рис. 14.

72°. Как изменится ответ предыдущей задачи, если улитка будет двигаться следующим образом:

а) 1 клетку вправо, 2 клетки вверх, 1 клетку вправо, 2 клетки вверх и т. д.?

б) 1 клетку вправо, 2 клетки вверх, 3 клетки вправо, 4 клетки вверх, 5 клеток вправо, 6 клеток вверх и т. д.?

в) 1 клетку вправо, 2 клетки вверх, 4 клетки вправо, 8 клеток вверх, 16 клеток вправо, 32 клетки вверх и т. д. (рис. 15).

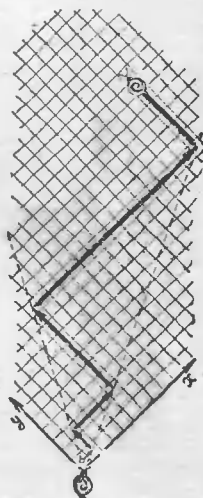


Рис. 15.

73. На параболе, которая является графиком функции  $y = x^2$ , берется точка  $A_0$  с абсциссой  $a$  и последовательность точек  $A_n$  с абсциссами  $a + 1/n$ . Обозначим через  $M_n$  точку пересечения оси  $Ox$  с секущей, проведенной через точки  $A_0$  и  $A_n$ . Докажите, что последовательность точек  $M_n$  имеет предел при  $n \rightarrow \infty$ , и найдите этот предел.



Пусть  $M_0$  — предел последовательности точек  $M_n$ . Прямая  $A_0M_0$  называется *касательной* к параболе в точке  $A_0$ .

74. Мальчик Петя вышел из дому и пошел в школу. Пройдя половину пути, он решил, что лучше пойти в кино, и свернул к кинотеатру. Когда он прошел половину пути, ему захотелось покататься на коньках и он повернул к катку. Пройдя половину пути до катка, он подумал, что нужно все-таки учиться, и повернул к школе. Но на половине пути к школе он снова свернул к кинотеатру (рис. 16). Куда придет мальчик Петя, если он будет идти таким образом?

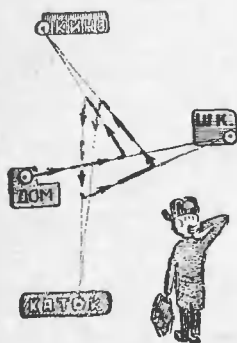


Рис. 16.

75. Последовательность  $M_n$  точек на прямой строится по следующему закону. Первые две точки,  $M_1$  и  $M_2$ , берутся произвольно, а каждая следующая точка является серединой отрезка, соединяющего две предыдущие точки. Доказать, что существует предел последовательности  $M_n$  и найти его.

76°. Найти суммы:

а)  $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} + \dots$ ;

б)  $a + 2a^2 + 3a^3 + \dots + na^n + \dots$ ;

в)  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$ ;

г)  $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots$ ;

д)\*  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

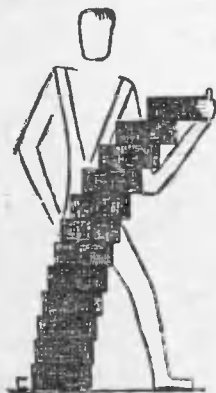


Рис. 17.

77\*. Имеется неограниченное количество одинаковых кирпичей в форме прямоугольного параллелепипеда. Кирпичи кладутся друг на друга с некоторым сдвигом так, чтобы они не падали (рис. 17). Какой длины «крышу» можно таким образом получить?

78°. Доказать, что последовательность  
 $2; 2 + \frac{1}{2}; 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}; 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}; \dots$

имеет предел, и найти его.

79°. Для вычисления квадратного корня из положительного числа  $a$  можно пользоваться следующим методом последовательных приближений. Возьмите произвольное число  $x_0$  и постройте последовательность по такому закону:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

а) Докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} \sqrt{a} & \text{при } x_0 > 0, \\ -\sqrt{a} & \text{при } x_0 < 0. \end{cases}$$

(Знаком  $\sqrt{a}$  мы обозначаем арифметический корень из  $a$ .)

б) Сколько понадобится последовательных приближений (т. е. сколько членов последовательности  $\{x_n\}$  нужно вычислить, чтобы найти значение  $\sqrt{10}$  с точностью до 0,00001, если в качестве начального значения взять  $x_0 = 3$ ?

80 \*\*. На стол кладутся спички, так что вторая спичка перпендикулярна к первой, а каждая следующая перпендикулярна к линии, соединяющей ее начало с началом первой спички (рис. 18). Получается развертывающаяся спираль.

а) Сколько оборотов делает эта спираль около начальной точки?

б) Каково расстояние между двумя последовательными витками спирали?

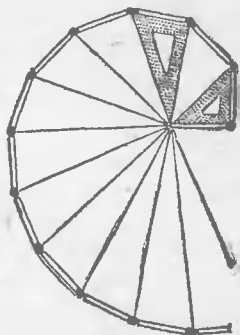


Рис. 18.



## КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

---

1. С какой точностью нужно измерить длину экватора, чтобы вычислить объем Земли с точностью до  $1 \text{ км}^3$  (считая Землю идеальным шаром, радиус которого равен  $6400 \text{ км}$ )?

2. Даны последовательности:

а)  $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$ ;

б)  $1, 2, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 1\frac{1}{n}, \dots$ ;

в)  $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \dots, 2k-1, \frac{1}{2k}$ .

Укажите, у каких из них почти все члены лежат в отрезке  $[-1, 1]$ ?

3. Известно, что последовательность  $\{x_n\}$  стремится к нулю.

а) Могут ли в этой последовательности быть члены, большие  $1\,000\,000$ ?

б) Могут ли все члены последовательности быть отрицательными?

в) Могут ли все члены последовательности быть больше  $0,000001$ ?

4. Докажите, что число  $1$  не является пределом последовательности

$$x_n = (-1)^n + n^{-1}.$$

5. Известно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ . Найти пределы последовательностей

$$\text{а) } y_n = \frac{2x_n - 1}{x_n + 1}; \quad \text{б) } y_n = \frac{x_n^2 + x_n - 2}{x_n - 1};$$

$$\text{в)} \quad y_n = \frac{x_n^{10} - 1}{x_n - 1}; \quad \text{г)} \quad y_n = \sqrt{x_n};$$

$$\text{д)} \quad y_n = \frac{x_n + x_n^2 + \dots + x_n^k - k}{x_n - 1},$$

6. Найти пределы:

$$\text{а)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n - 2}{1 + 2 + 3 + \dots + n};$$

$$\text{б)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n});$$

$$\text{в)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{4^n}; \quad \text{г)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^n + 5^n}{2^n + 6^n}.$$

7. Найти пределы последовательностей:

а)  $x_n = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}$  ( $n$  знаков квадратного корня);

$$\text{б)} \quad x_n = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4) \dots (1 + a^{2^n});$$

$$\text{в)} \quad x_n = (1 - 1/4)(1 - 1/9)(1 - 1/16) \dots (1 - 1/(n+1)^2).$$

8. Последовательность  $\{x_n\}$  строится по следующему закону: первый член выбирается произвольно, а каждый следующий выражается через предыдущий по формуле  $x_{n+1} = ax_n + 1$ . При каких вещественных  $a$  последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел?

9. На графике функции  $y = x^2$  рассмотрим точки  $A_n$  и  $B_n$  с абсциссами  $-1/n$  и  $+1/n$  соответственно. Пусть  $M_n$  — центр окружности, проведенной через точки  $A_n, B_n$  и начало координат (рис. 19). Докажите, что последовательность точек  $\{M_n\}$  имеет предел и найдите его.

10. Известно, что последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  имеют предел. Составим последовательность:  $x_1; y_1; x_2; y_2; \dots; x_n; y_n; \dots$ . Имеет ли эта последовательность предел?

11. а) Известно, что последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел. Докажите, что последовательность  $y_n = x_{n+1} - x_n$  стремится к нулю.

б) Верно ли обратное?

12. Найти сумму:

$$\text{а)} \quad \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} + \dots;$$

$$\text{б)} \quad \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{19}{216} + \dots + \frac{3^n - 2^n}{6^n} + \dots$$

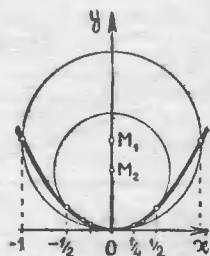


Рис. 19.

1. Если за сутки не было ни одного дождя, оба школьника поставят оценки  $+$ . Если все время шел дождь, то оба поставят  $-$ . Если утром шел дождь, а днем и вечером было сухо, то первый поставит  $-$ , а второй  $+$ .

Случай  $+$  — невозможен, потому что первый школьник ставит  $+$  только в том случае, если дождя не было ни разу. Но тогда и второй школьник должен поставить  $+$ .

2. Первый способ. Если первый школьник поставил  $+$ , это значит, что дождя не было ни разу. Тогда остальные два тоже поставят  $+$ . Общая оценка будет  $+++$ . Если первый поставил  $-$ , а третий  $+$ , это значит, что дождь шел ровно один раз из трех. В этом случае второй школьник должен поставить  $+$ . Общая оценка будет  $-++$ . Если же первый и третий поставят  $-$ , это значит, что дождь шел или 2 раза из трех, или все 3 раза. В первом случае второй школьник поставит  $+$ , во втором случае  $-$ . Общая оценка будет  $-+-$  или  $---$ . Так как мы разобрали все возможные случаи, других оценок встретиться не может.

Второй способ. Дождь может идти 0, 1, 2 или 3 раза. Ответ очевиден из таблицы:

Оценки \ Сколько раз шел дождь				
	0	1	2	3
1-й школьник . . . . .	$+$	$-$	$-$	$-$
2-й школьник . . . . .	$+$	$+$	$+$	$-$
3-й школьник . . . . .	$+$	$+$	$-$	$-$

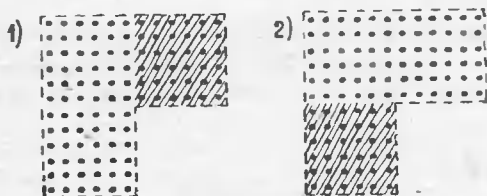


Рис. 20.

3. а) Пусть  $A$  — самый низкий среди высоких,  $B$  — самый высокий из низких. Сравним их с  $V$  — человеком, который стоит в той же шеренге, что и  $A$ , и в том же ряду, что и  $B$ . Поскольку  $A$  — самый высокий в своей шеренге, то он выше  $V$ , а так как  $B$  — самый низкий в своем ряду, то он ниже  $V$ . Значит,  $A$  выше  $B$ .

б) Рассмотрим два расположения (рис. 20).

Если на заштрихованные места поставить людей более высокого роста по сравнению с остальными, то в первом случае самый низкий из высоких окажется ниже, а во втором случае — выше, чем самый высокий из низких (проверьте!).

Подумайте, почему в первом из этих случаев нельзя применить те же рассуждения, что и в решении задачи а).

5. Предположим, что каждый школьник решил только одну задачу, но так, что каждая задача была кем-нибудь решена. В этом случае контрольная будет трудной в смысле б) и легкой в смысле а).

7. Примеры  $3 + 4 = 7$ ,  $2 + 7 = 9$  показывают, что теоремы 2, 3, 4, 5 неверны. Теорема 1 очевидна. Теорема 6 легко доказывается от противного.

8. а) Рассмотрим угол, лежащий против стороны 13. Если бы этот угол был острый, то по теореме о стороне, лежащей против острого угла, выполнялось бы неравенство

$$13^2 < 12^2 + 5^2.$$

Если бы этот угол был тупой, то по теореме о стороне, лежащей против тупого угла, выполнялось бы неравенство

$$13^2 > 12^2 + 5^2.$$

Но оба эти неравенства не выполняются, так как

$$13^2 = 169 = 144 + 25 = 12^2 + 5^2.$$

Поэтому рассматриваемый угол не может быть ни острым, ни тупым. Значит, он прямой.

б) Теорема Пифагора относится к прямоугольным треугольникам, а мы еще не знаем, будет ли наш треугольник прямоугольным. Поэтому теорему Пифагора применять нельзя.

Некоторые школьники рассуждают так. Будем доказывать от противного. *Если наш треугольник не прямоугольный, то утверждение теоремы Пифагора не выполняется* и должно быть неравенство  $13^2 \neq 12^2 + 5^2$ . Но это неверно. Значит, треугольник прямоугольный.

Дело в том, что утверждение, набранное курсивом, не следует из теоремы Пифагора. Ведь теорема Пифагора относится к прямоугольным треугольникам и ничего не утверждает относительно других треугольников. Таким образом, приведенное выше рассуждение использует не теорему Пифагора, а другие теоремы, относящиеся к непрямоугольным треугольникам.

9. а) Пусть теорема I имеет вид «Если А, то В». Тогда теорема II выглядит так: «Если В, то А», а теорема III так: «Если  $\bar{A}$ , то  $\bar{B}$ ». Проверим эквивалентность теорем II и III методом от противного. Для этого предположим, что одна из этих теорем верна, а другая — нет. Пусть, например, неверна теорема III. Это значит, что в некотором случае условие теоремы III выполняется, а заключение не выполняется. Таким образом, в этом случае верно  $\bar{A}$  и неверно  $\bar{B}$ . Но  $\bar{A}$  — это отрицание А, а  $\bar{B}$  — отрицание В. Значит, в рассматриваемом случае А неверно, а В верно. Это противоречит теореме II: «Если В, то А».

Итак, предположение о том, что теорема III неверна, а теорема II верна, привело нас к противоречию.

Аналогично разбирается случай, когда теорема II предполагается неверной, а III — верной.

б) Можно рассуждать так же, как в решении задачи а). Другой способ — воспользоваться тем, что задача а) уже решена, и свести задачу б) к задаче а). Это можно сделать так. Будем в качестве прямой теоремы рассматривать теорему II. «Если В, то А». По отношению к ней теорема I «Если А, то В» является обратной; а теорема IV «Если  $\bar{B}$ , то  $\bar{A}$ » — противоположной. Но мы уже знаем из решения задачи а), что обратная и противоположная теорема эквивалентны. Значит, теоремы I и IV эквивалентны.

10. Теорему 8 легко доказать от противного (если верна теорема 1). В самом деле, пусть теорема 8 неверна. Это

значит, что из  $\overline{B}$  не следует  $\overline{A}$ , т. е. возможен случай, когда выполняется  $\overline{B}$  и не выполняется  $\overline{A}$ . Но это означает, что не выполняется  $B$  и выполняется  $A$ . По теореме 1 это невозможно.

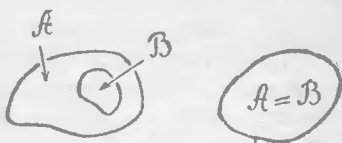


Рис. 21.

Для теорем 4 и 5 можно подобрать и такие примеры утверждений  $A$  и  $B$ , для которых эти теоремы верны, и такие, для которых они неверны. Наиболее наглядные примеры можно построить так. Пусть  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  — два множества точек на плоскости. В качестве  $A$  возьмем утверждение «точка  $M$  принадлежит множеству  $\mathcal{A}$ », а в качестве  $B$  — утверждение «точка  $M$  принадлежит множеству  $\mathcal{B}$ ». Тогда теорема 1 означает, что множество  $\mathcal{A}$  целиком содержится в множестве  $\mathcal{B}$ ; теорема 2, что дополнение к  $\mathcal{A}$  содержится в  $\mathcal{B}^*$ ; теорема 3, что  $\mathcal{A}$  содержится в дополнении к  $\mathcal{B}$ , и т. д.

Сформулируйте самостоятельно остальные теоремы и нарисуйте примеры множеств  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , для которых эти теоремы верны, и примеры, для которых они неверны.

Нужные нам примеры получаются из рассмотрения рис. 21.

Разберите эти случаи самостоятельно и убедитесь, что теоремы 4 и 5 могут быть и верными, и неверными.

Разумеется, можно было бы привести и другие примеры (например, теоремы 1 и 6 из задачи 7 или знакомые вам теоремы из геометрии и алгебры).

Докажем теперь, что теоремы 2, 3, 6 и 7 неверны.

Если бы теорема 2 была верна, то мы имели бы следующую схему:

$$A \xrightarrow{\text{теорема 1}} B \xleftarrow{\text{теорема 2}} \overline{A}$$

(если  $A$  верно, то  $B$  верно по теореме 1, если  $A$  неверно, то  $B$  верно по теореме 2). Таким образом, утверждение  $B$  должно быть верным всегда, а мы условились такие утверждения не рассматривать.

Если теорема 3 верна, то

$$B \xleftarrow{\text{теорема 1}} A \xrightarrow{\text{теорема 3}} \overline{B}.$$

\*) Дополнением к некоторому множеству  $\mathcal{A}$  на плоскости называется совокупность всех точек плоскости, не входящих в  $\mathcal{A}$ . Например, дополнением к верхней полуплоскости (включая ось  $Ox$ ) будет нижняя полуплоскость (не включая точек оси  $Ox$ ).

Значит, если в каком-нибудь случае утверждение  $A$  верно, то верны два противоречащих друг другу утверждения  $B$  и  $\bar{B}$ , что невозможно. Итак,  $A$  всегда неверно. Но такие утверждения мы не рассматриваем.

Если верна теорема 6, то

$$\bar{B} \xrightarrow{\text{теорема 6}} A \xrightarrow{\text{теорема 1}} B.$$

Мы видим, что из того, что утверждение  $B$  неверно, следует, что оно верно. Это может быть только в том случае, когда  $B$  верно всегда.

Если верна теорема 7, то

$$A \xrightarrow{\text{теорема 1}} B \xrightarrow{\text{теорема 7}} \bar{A}.$$

Другими словами, из того, что  $A$  верно, следует, что  $A$  неверно. Значит,  $A$  всегда неверно.

13. а) Пусть сначала  $x \geq 0$ . Тогда  $|x| = x$  и мы получаем уравнение  $3x = 3$ , откуда  $x = 1$ . Пусть теперь  $x \leq 0$ ; тогда  $|x| = -x$  и мы получаем уравнение  $-x = 3$ , откуда  $x = -3$ .

Итак,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -3$ .

б) Для  $x \geq 0$  получаем уравнение  $x^2 + 3x - 4 = 0$ , откуда  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -4$ . Условие  $x \geq 0$  удовлетворяет только первый корень.

Для  $x \leq 0$  получаем уравнение  $x^2 - 3x - 4 = 0$ , откуда  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 4$ . Условию  $x \leq 0$  удовлетворяет только первый корень.

Итак,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -1$ .

в) Пусть  $x < -1/2$ . Тогда  $|2x + 1| = -(2x + 1)$ ,  $|2x - 1| = -(2x - 1)$ . Мы получаем  $-(2x + 1) - (2x - 1) = 2$ , откуда  $x = -1/2$ .

Пусть  $-1/2 \leq x \leq 1/2$ . Тогда имеем  $|2x + 1| = 2x + 1$ ,  $|2x - 1| = -(2x - 1)$ . Мы получаем  $(2x + 1) - (2x - 1) = 2$ , равенство, которое выполняется тождественно. Значит, все числа отрезка  $[-1/2, 1/2]$  являются решениями нашего уравнения. Пусть теперь  $x > 1/2$ . Тогда найдем  $|2x + 1| = 2x + 1$  и  $|2x - 1| = 2x - 1$ . Мы получаем  $(2x + 1) + (2x - 1) = 2$ , откуда  $x = 1/2$ .

Итак, решениями являются все числа отрезка  $[-1/2, 1/2]$ .

14. а) Пусть сначала числа  $x$  и  $y$  положительны. Тогда  $|x| = x$ ,  $|y| = y$ ,  $|x + y| = x + y$ . Исследуемое неравенство превращается в равенство.

Если  $x$  положительно, а  $y$  отрицательно, то нужно отдельно рассмотреть случай  $x + y \geq 0$  и случай  $x + y < 0$ .

В первом случае  $|x| = x, |y| = -y, |x + y| = x + y$ . Неравенство принимает вид  $x + y \leq x - y$ . Оно верно, так как  $y$  отрицательно.

Во втором случае  $|x| = x, |y| = -y, |x + y| = -(x + y)$ . Неравенство принимает вид

$$-x - y \leq x - y.$$

Оно верно, так как  $x$  положительно.

Остальные случаи получаются из разобранных, если изменить знак у обоих чисел  $x$  и  $y$ . Так как при этом  $|x|, |y|$  и  $|x + y|$  не изменятся, неравенство останется верным.

б) Можно было бы, как в решении задачи а), рассмотреть отдельно все возможные случаи расположения чисел  $x, y$  и  $x - y$  на числовой оси, но мы воспользуемся тем, что неравенство  $|x + y| \leq |x| + |y|$  уже доказано. Обозначим  $x - y$  через  $z$ . Тогда  $x = y + z$ . Так как  $|y + z| \leq |y| + |z|$ , то мы получили, что  $|x| \leq |y| + |x - y|$ , что и требовалось доказать.

в) Здесь опять возможно решение с помощью разбора различных случаев, но проще вывести это неравенство из уже доказанных. Для этого заметим, что если  $|x| \geq |y|$ , то наше неравенство совпадает с неравенством задачи б). Если же  $|x| < |y|$ , то наше неравенство принимает вид  $|x - y| \geq |y| - |x|$  или  $|y - x| \geq |y| - |x|$ . А это снова неравенство задачи б), в котором переставлены  $x$  и  $y$ .

**З а м е ч а н и е.** Можно предложить более наглядное решение, если воспользоваться тем, что величина  $|x|$  равна расстоянию между точками  $x$  и  $0$  на числовой оси, а величина  $|x - y|$  — расстоянию между точками  $x$  и  $y$ . См. по этому поводу первый выпуск нашей «Библиотечки», который называется «Метод координат».

15. а) Неравенство  $\sqrt[n]{1000} < 1,001$  можно переписать так:  $1000 < (1 + 0,001)^n$ . Раскроем правую часть по формуле бинома. Мы получим

$$(1 + 0,001)^n = 1 + \frac{n}{1000} + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1000^2} + \dots + \frac{1}{1000^n}.$$

Отсюда видно, что при  $n > 1$  величина  $(1 + 0,001)^n$  во всяком случае больше, чем  $1 + \frac{n}{1000}$ . Поэтому при достаточно большом  $n$ , например, при  $n = 1\,000\,000$ , будет:  $(1 + 0,001)^n > 1000$ . Значит, при  $n = 1\,000\,000$  выполняется и исходное неравенство.



б) Так же, как в решении задачи а), перепишем неравенство в виде  $n < (1 + 0,001)^n$  и раскроем правую часть по формуле бинома. Из этой формулы следует, что при  $n > 2$  справедливо неравенство

$$(1 + 0,001)^n > 1 + \frac{n}{1000} + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1000^2}.$$

Но при достаточно большом  $n$  это выражение больше, чем  $n$ . В самом деле, если  $n-1 > 2 \cdot 1000^2$ , то уже последнее слагаемое будет больше  $n$ . Следовательно, при  $n = 2 \cdot 1000^2 + 2$  выполняется неравенство  $(1,001)^n > n$ , а

значит, и исходное неравенство  $\sqrt[n]{n} < 1,001$ .

в) Воспользуемся тождеством

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Из него видно, что величина  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$  во всяком случае меньше, чем  $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ . Поэтому при  $n > 25$  выполняется неравенство

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{10}.$$

г) Такого числа  $n$  не существует. В самом деле, если  $\sqrt{n^2+n} - n < 0,1$ , то  $\sqrt{n^2+n} < n + 0,1$  и

$$n^2 + n < (n + 0,1)^2 = n^2 + 0,2n + 0,01.$$

Последнее неравенство, очевидно, не выполняется ни при каком натуральном  $n$ , так как  $n > 0,2n + 0,01$ .

16. а) Посмотрим, как ведет себя выражение  $\left| \frac{k^3 - 2k + 1}{k^4 - 3} \right|$  при больших (по абсолютной величине) значениях  $k$ . Ясно, что в числителе главную роль играет член  $k^3$ , а в знаменателе —  $k^4$ . Поэтому можно ожидать, что при больших значениях  $k$  наше выражение приблизительно равно  $\left| \frac{k^3}{k^4} \right| = \frac{1}{|k|}$ .

Исследуем теперь, насколько точное значение нашего выражения отличается от найденного приближенного. Для этого сделаем преобразование:

$$\left| \frac{k^3 - 2k + 1}{k^4 - 3} \right| = \left| \frac{k^3 \left( 1 - \frac{2}{k^2} + \frac{1}{k^3} \right)}{k^4 \left( 1 - \frac{3}{k^4} \right)} \right| = \frac{1}{|k|} \cdot \frac{\left| 1 - \frac{2}{k^2} + \frac{1}{k^3} \right|}{\left| 1 - \frac{3}{k^4} \right|}.$$

Пусть  $|k| \geq 2$ ; тогда

$$\left| 1 - \frac{2}{k^2} + \frac{1}{k^3} \right| \leq 1 + \frac{2}{k^2} + \frac{1}{|k|^3} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} < 2,$$

$$\left| 1 - \frac{3}{k^4} \right| \geq 1 - \frac{3}{k^4} \geq 1 - \frac{3}{16} > \frac{1}{2}.$$

Поэтому при  $|k| \geq 2$  справедливо неравенство

$$\frac{1}{|k|} \cdot \frac{\left| 1 - \frac{2}{k^2} + \frac{1}{k^3} \right|}{\left| 1 - \frac{3}{k^4} \right|} < \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = 2.$$

Таким образом, при  $|k| \geq 2$  наше выражение не превосходит 2. Остается посмотреть, какие значения оно принимает при  $k = -1, 0, 1$ . Эти значения равны соответственно 1,  $1/3$ , 0. Итак, искомое число  $C$  существует. Например, можно положить

$$C = 2.$$

З а м е ч а н и е. Таким же способом можно получить более точные оценки для нашего выражения и убедиться, что наибольшее значение, равное 1, оно принимает при  $k = -1$ . Сделайте это самостоятельно.

б) Наше выражение является произведением двух чисел:  $k$  и  $\sin k$ . Первое из них может быть выбрано как угодно большим. Если при этом второе число не будет слишком маленьким, то и все произведение будет большим числом. Потребуем, например, чтобы  $\sin k$  было больше  $1/2$ . Множество точек  $x$ , для которых  $\sin x > 1/2$ , состоит из бесконечного числа интервалов вида

$$2\pi n + \pi/6 < x < 2\pi n + 5\pi/6,$$

где  $n$  — любое целое число (рис. 22). Длина каждого интервала равна  $2\pi/3$ . Так как эта длина больше 1, внутри каждого из этих интервалов есть хотя бы одно целое число. Отсюда следует, что для любого числа  $C$  существует бесконечно много чисел, для которых  $k \sin k > C$ . В самом деле, для всех чисел  $k$ , лежащих в указанных выше

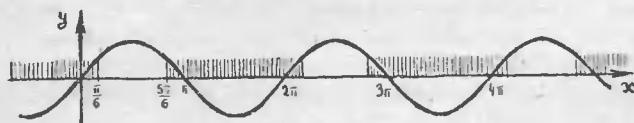


Рис. 22.

интервалах, выполняется неравенство  $\sin k > 1/2$ . Поэтому, если натуральное число  $k$  больше, чем  $2C$ , и лежит внутри одного из указанных интервалов, то  $k \sin k > C$ . Таких чисел, очевидно, бесконечно много.

17. а) Пусть истинная длина одной стороны (в сантиметрах) равна  $a$ , а другой —  $b$ ; результаты измерения обозначим  $a+x$  и  $b+y$  соответственно. По условию, величины  $|x|$  и  $|y|$  не превосходят 1. Тогда ошибка в вычислении периметра равна  $2(a+x) + 2(b+y) - (2a+2b) = 2x + 2y$ . В силу неравенства задачи 13а мы можем написать

$$|2x + 2y| \leq 2|x| + 2|y| \leq 4.$$

Ошибка в измерении площади равна

$$(a+x)(b+y) - ab = ay + bx + xy.$$

Отсюда видно, что величина ошибки зависит от величин сторон. Например, если речь идет о площади тетрадного листа, то  $a \approx 15$ ,  $b \approx 20$  и ошибка не превосходит  $36 \text{ см}^2$ :

$$|ay + bx + xy| \leq a|y| + b|x| + |x| \cdot |y| \leq 15 + 20 + 1 = 36.$$

Если же измеряется площадь футбольного поля, то  $a \approx 5000$ ,  $b \approx 8000$ . В этом случае ошибка может составить более одного квадратного метра.

б) Используем те же обозначения, что и в задаче а). По условию,  $|x| < 0,01a$ ,  $|y| < 0,01b$ . Отсюда  $|2x + 2y| \leq 2|x| + 2|y| \leq 0,01 \cdot (2a + 2b)$ . Значит, ошибка при вычислении периметра не превосходит одного процента.

Далее,

$$|ay + bx + xy| \leq a|y| + b|x| + |xy| \leq \leq 0,01ab + 0,01ba + 0,0001ab = 0,0201ab.$$

Значит, ошибка при вычислении площади не превосходит 2,01 процента, т. е. практически, двух процентов.

18. а) Сравним два соседних члена последовательности:

$$x_n - x_{n+1} = \frac{n^2}{2^n} - \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} = \frac{n^2 - 2n - 1}{2^{n+1}} = \frac{(n-1)^2 - 2}{2^{n+1}}.$$

При  $(n-1)^2 < 2$  (т. е. при  $n = 1, 2$ ) это выражение отрицательно и, значит,  $x_n < x_{n+1}$ . При  $(n-1)^2 > 2$  (т. е. при  $n \geq 3$ ) оно положительно и, значит,  $x_n > x_{n+1}$ . Отсюда  $x_3$  — наибольший член.

б) Эту задачу можно решить, как и предыдущую, рассматривая разность  $x_n - x_{n+1}$ . Сделайте это самостоятельно.

Другой способ:

$$x_n = \frac{n}{100 + n^2} = \frac{n}{(10 - n)^2 + 20n} = \frac{1}{20 + \left(\frac{10}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)^2}.$$

Знаменатель последней дроби при любом  $n$  не меньше 20, и равен 20 только, когда  $\frac{10}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} = 0$ , т. е. при  $n = 10$ .

в) Сравним два соседних члена:

$$x_n - x_{n+1} = \frac{1000^n}{n!} - \frac{1000^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1000^n}{(n+1)!} (n+1 - 1000).$$

Отсюда видно, что  $x_n < x_{n+1}$  при  $n < 999$ ,  $x_n = x_{n+1}$  при  $n = 999$ ,  $x_n > x_{n+1}$  при  $n > 999$ . Значит, наибольшими будут  $x_{999} = x_{1000}$ .

19. а) Первый способ:  $x_n - x_{n+1} = (n^2 - 5n + 1) - [(n+1)^2 - 5(n+1) + 1] = 4 - 2n$ . Отсюда:

$$x_n - x_{n+1} > 0 \text{ при } n < 2,$$

$$x_n - x_{n+1} = 0 \text{ при } n = 2,$$

$$x_n - x_{n+1} < 0 \text{ при } n > 2.$$

Вывод: наименьшими будут  $x_2 = x_3$ .

Второй способ:  $x_n = n^2 - 5n + 1 = (n - 2,5)^2 - 5,25$ . Поскольку  $n$  — целое, то величина  $(n - 2,5)^2$  принимает наименьшее значение при  $n = 2$  и  $n = 3$ .

б) Каждый член этой последовательности является обратной величиной для соответствующего члена последовательности из задачи 17б). См. решение этой задачи.

б) Первый способ. Выпишем несколько членов нашей последовательности:

$$6, 2, -2, 4, 10, 6, 2, 8, \dots$$

Можно предположить, что наименьшим является  $x_3 = -2$ . Докажем это. Сравним числа  $x_n$  и  $-2$  при  $n > 3$ :

$$x_n - (-2) = n + 2 + 5 \sin \frac{\pi n}{2} > 5 + 5 \sin \frac{\pi n}{2} \geq 0.$$

Второй способ. Разобьем нашу последовательность на три подпоследовательности и рассмотрим отдельно каждую из них. Первая подпоследовательность состоит из членов с четными номерами:

$$x_{2k} = 2k + 5 \sin \pi k = 2k.$$

Вторая подпоследовательность состоит из членов с номерами  $n = 4k + 1$ :

$$x_{4k+1} = 4k + 1 + 5 \sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right) = 4k + 6.$$

Третья подпоследовательность состоит из членов с номерами  $n = 4k - 1$ :

$$x_{4k-1} = 4k - 1 + 5 \sin\left(2\pi k - \frac{\pi}{2}\right) = 4k - 6.$$

Все три подпоследовательности оказались возрастающими арифметическими прогрессиями. В каждой из них наименьший член — первый. Наименьшим из этих трех будет  $x_3 = -2$ .

23. Нам нужно выяснить, при каких  $n$  справедливы неравенства

$$-0,001 \leq \frac{10n}{n^2 + 1} \leq 0,001.$$

Левое неравенство верно при любых положительных  $n$ . Правое неравенство удобно переписать так:

$$10n \leq 0,001(n^2 + 1),$$

и затем так:

$$10\,000 \leq n + \frac{1}{n}$$

(мы воспользовались тем, что обе части неравенства можно умножить на положительное число).

Ясно, что последнее неравенство верно для всех натуральных  $n$ , начиная с  $n = 10\,000$ .

24. Примером такой последовательности является  $x_n = n!$

25. а) Пусть отрезок  $[a, b]$  — ловушка. Это значит, что вне этого отрезка может быть только конечное число членов последовательности. Если бы этот отрезок не был кормушкой, то внутри его тоже было бы только конечное число членов последовательности. Но всего в последовательности бесконечное множество членов. Противоречие показывает, что отрезок  $[a, b]$  должен быть кормушкой.

б) Рассмотрим последовательность

$$1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \dots$$

и отрезок  $[0, 1]$ . Первый, третий, пятый и т. д. члены после-



На самом деле каждое рациональное число встретится в нашей последовательности даже бесконечное число раз, поскольку рациональное число бесконечным числом способов можно представить в виде  $p/q$  (например,  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \dots$ ). Однако указать явно для каждого рационального числа номер соответствующего члена последовательности не так просто. Попробуйте, например, найти номер чисел  $1\frac{1}{3}$ ,  $-\frac{5}{7}$ . А чему равен 100-й член последовательности?

27. а) При любом расположении отрезка длины 1 он не пересекается с одним из отрезков  $[0, 1]$  и  $[9, 10]$ . Пусть, например, наш отрезок не имеет общих точек с отрезком  $[0, 1]$ . Если бы наш отрезок был ловушкой, то вне его и, в частности, внутри отрезка  $[0, 1]$  было бы только конечное число членов последовательности. А это противоречит тому, что отрезок  $[0, 1]$  по условию является кормушкой.

б) Рассмотрим две последовательности:

$$1) 1; 9; \frac{1}{2}; 9\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 9\frac{2}{3}; \dots; \frac{1}{n}; 9\frac{n-1}{n}; \dots,$$

$$2) 0; 10; \frac{1}{2}; 9\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; 9\frac{1}{3}; \dots; \frac{n-1}{n}; 9\frac{1}{n}; \dots$$

Для первой последовательности не существует ловушки длины 9. (Проверьте, что отрезки  $[0, \frac{1}{3}]$  и  $[9\frac{2}{3}, 10]$  являются кормушками для этой последовательности. Отсюда, как и в решении задачи а), доказывается, что ловушки длины 9 не существует.)

Для второй последовательности отрезок  $[1\frac{1}{2}, 9\frac{1}{2}]$  является ловушкой, так как все члены последовательности, начиная с третьего, принадлежат этому отрезку.

29. а) Рассмотрим отрезок с центром в точке  $a$ . Длину этого отрезка обозначим через  $2\varepsilon$ . По определению предела найдется такое число  $k$ , что при всех  $n > k$  справедливо неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ . Это неравенство означает, что точка  $x_n$  лежит на нашем отрезке. Итак, вне нашего отрезка расположено не более  $k$  членов последовательности. Значит, наш отрезок — ловушка.

б) Пусть задано любое положительное число  $\varepsilon$ . Рассмотрим отрезок с центром в точке  $a$ , имеющий длину меньше  $2\varepsilon$ . По условию, этот отрезок является ловушкой. Поэтому вне его лежит только конечное число членов последовательности. Пусть  $k$  — наибольший из номеров этих членов. (Если вне отрезка совсем нет членов последовательности, то положим  $k = 0$ .) Тогда для любого  $n > k$  член  $x_n$  лежит на нашем отрезке, т. е. выполняется неравенство

$|x_n - a| < \varepsilon$ . Мы доказали, таким образом, что  $a$  — предел последовательности  $\{x_n\}$ .

30. а) Пусть задан отрезок с центром в точке  $a$ . Обозначим длину отрезка через  $2\varepsilon$ . Тогда по определению предела, существует такое число  $k$ , что при  $n > k$  выполняется неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ . Это значит, что все члены последовательности с номерами, большими  $k$ , лежат на заданном отрезке.

Пусть теперь задан отрезок, не содержащий точки  $a$ . Обозначим через  $\varepsilon$  расстояние от точки  $a$  до ближайшего конца отрезка. По определению предела, существует такое число  $k$ , что при  $n > k$  выполняется неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ . Это значит, что при  $n > k$  член  $x_n$  лежит ближе к точке  $a$ , чем ближайший конец заданного отрезка. Поэтому все члены с номерами, большими  $k$ , лежат вне этого отрезка. Значит, на заданном отрезке не может быть бесконечного множества членов последовательности.

б) Для последовательности

$$1; 2; \frac{1}{3}; 4; \frac{1}{5}; 6; \dots; n^{(-1)^n}$$

любой отрезок с центром в точке 0 является кормушкой. В самом деле, подпоследовательность, составленная из членов с нечетными номерами  $1; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \dots; \frac{1}{2n-1}; \dots$ , очевидно, стремится к нулю. Поэтому в любом отрезке с центром в точке 0 имеется бесконечное множество членов этой подпоследовательности (см. решение задачи а)). Значит, этот отрезок является кормушкой для исходной последовательности. Покажем теперь, что никакой отрезок, не содержащий точки 0, не является кормушкой. В самом деле, для подпоследовательности, составленной из членов с нечетными номерами, этот отрезок — не кормушка (см. решение задачи а)); для подпоследовательности, составленной из членов с четными номерами  $2; 4; 6; 8; \dots$ , вообще никакой отрезок не может быть кормушкой (докажите это самостоятельно). Поэтому на любом отрезке, не содержащем точки 0, будет только конечное число членов с четными номерами и конечное число членов с нечетными номерами. Значит, на этом отрезке лишь конечное число членов последовательности и, следовательно, отрезок — не кормушка.

Итак, последовательность  $x_n = n^{(-1)^n}$  и число 0 удовлетворяют условиям задачи 30б). Но число 0 не является



пределом последовательности. В самом деле, в противном случае для всех членов последовательности, начиная с некоторого номера, выполнялось бы условие  $|x_n| < 1$ . Однако это неравенство не выполняется для всех членов с четными номерами.

**З а м е ч а н и е.** Последовательность

$$x_n = n(-1)^n$$

можно представлять себе как объединение двух более простых последовательностей

$$1; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}; \dots; \frac{1}{2n-1}; \dots$$

и

$$2; 4; 6; \dots; 2n; \dots$$

Этот способ построения последовательностей часто бывает полезен. Так, чтобы построить пример последовательности, для которой каждый из двух заданных отрезков являлся бы кормушкой, можно объединить две последовательности, для одной из которых первый отрезок является кормушкой, а для другой — второй отрезок является кормушкой.

**31.** В решении задачи 30а) мы доказали, что если  $x_n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ , то никакой отрезок, не содержащий точки  $a$ , не является кормушкой. Отсюда требуемое утверждение легко выводится методом от противного. Сделайте это самостоятельно.

**32.** Для того чтобы доказать, что последовательность  $\{x_n\}$  имеет пределом число  $a$ , нужно показать, что для каждого положительного числа  $\varepsilon$  можно подобрать такое число  $k$ , что при  $n > k$  будет справедливо неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ . Часто бывает возможно указать явную формулу, выражающую  $k$  через  $\varepsilon$ .

а)  $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . Так как  $|x_n| = 1/n$ , то

в качестве  $k$  можно взять  $1/\varepsilon$ . В самом деле, при  $n \geq 1/\varepsilon$  выполняется неравенство  $|x_n| = 1/n < \varepsilon$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Число  $k$  определяется по заданному  $\varepsilon$  неоднозначно. В разобранным примере в качестве  $k$  можно было взять  $2/\varepsilon$  или  $1/\varepsilon + 1$  (и, вообще, любое число, большее  $1/\varepsilon$ ). Часто бывает удобно брать не самое «экономное» значение для  $k$  (которое может очень сложно выражаться через  $\varepsilon$ ), а более простое выражение. Например, чтобы доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/(n^3 + 0,6n + 3,2) = 0$ , можно

воспользоваться тем, что  $x_n < 1/n^3 \leq 1/n$  и в качестве  $k$  взять  $1/\varepsilon$ . Это гораздо удобнее, чем самое экономное значение

$$k = \sqrt[3]{1,6 + \sqrt{2,552 - \frac{1,6}{\varepsilon} + \frac{1}{4\varepsilon^2}}} + \sqrt[3]{1,6 - \sqrt{2,552 - \frac{1,6}{\varepsilon} + \frac{1}{4\varepsilon^2}}},$$

которое получается из решения кубического уравнения

$$n^3 + 0,6n + 3,2 = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Бывают и такие случаи, когда для самого экономного значения  $k$  вообще нельзя указать явной формулы, а значение «с запасом» легко может быть найдено.

Замечание 2. Ясно, что если для заданного  $\varepsilon$  удалось найти какое-нибудь  $k$ , то для этого же  $\varepsilon$  годятся и все большие числа. Поэтому в определении предела можно считать  $k$  целым числом.

$$\text{б) } x_n = \frac{3^n - 1}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

Так как  $|x_n - 1| = 1/3^n$ , то в качестве  $k$  можно взять  $\log_3(1/\varepsilon)$ .

в) Пользуясь формулой суммы геометрической прогрессии, находим

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Отсюда видно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ , и в качестве  $k$  можно взять  $\log_2(1/\varepsilon)$ .

г) Предела не существует, так как для любого числа  $a$  и любого  $\varepsilon$  неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$  выполняется только для конечного числа номеров  $n$ .

д)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ ; так как  $|x_n - 1|$  в этом случае тождественно равно нулю, неравенство  $|x_n - 1| < \varepsilon$  выполняется при любом положительном  $\varepsilon$  для всех номеров  $n$ .

е) Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного  $n$ . При четном  $n = 2m$  мы имеем  $x_n = 1/m$ . Поэтому при  $m > 1/\varepsilon$  (т. е. при  $n > 2/\varepsilon$ ) выполняется неравенство  $|x_n| < \varepsilon$ . При нечетном  $n$  член  $x_n$  равен нулю, поэтому неравенство  $|x_n| < \varepsilon$  выполняется для всех нечетных номеров. Итак,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  и в качестве  $k$  можно взять число  $2/\varepsilon$ .

ж) По формуле суммы геометрической прогрессии имеем

$$\underbrace{0,22 \dots 2}_n = \frac{2}{10} + \frac{2}{10^2} + \dots + \frac{2}{10^n} = \frac{2}{9} \left( 1 - \frac{1}{10^n} \right).$$

Отсюда  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{2}{9}$ , и в качестве  $k$  можно взять  $\lg \frac{2}{9\varepsilon}$  (или просто  $\lg (1/\varepsilon)$ ; см. замечание к решению примера а)).

з) Предела не существует. В самом деле, если  $n = 180^\circ m$ , то  $x_n = 0$ , а если  $n = 90^\circ + 360^\circ m$ , то  $x_n = 1$ . Если бы последовательность имела предел  $a$ , то, начиная с некоторого номера  $n_0$ , выполнялось бы неравенство  $|x_n - a| < 1/4$ . Отсюда в свою очередь следовало бы, что при  $n_1 > n_0$  и  $n_2 > n_0$  выполнялось бы неравенство

$$|x_{n_1} - x_{n_2}| \leq |x_{n_1} - a| + |a - x_{n_2}| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Но в нашей последовательности есть члены со сколь угодно большими номерами, отстоящие друг от друга больше, чем на  $1/2$ .

и) Так как  $|\cos n^\circ| \leq 1$ , то  $|x_n| \leq 1/n$ . Отсюда видно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  и в качестве  $k$  можно взять  $1/\varepsilon$ .

к) Предела не существует. Если бы число  $a$  было пределом, то, начиная с некоторого номера, выполнялось бы неравенство  $|x_n - a| < 1/2$ . Тогда

$$|x_n - x_{n+1}| \leq |x_n - a| + |a - x_{n+1}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Но разность между любыми соседними членами нашей последовательности больше 1.

33. Предположим, что два разных числа  $a$  и  $b$  являются пределами одной и той же последовательности  $\{x_n\}$ . Обозначим расстояние между этими точками через  $2\varepsilon$ . Если  $a$  — предел последовательности  $\{x_n\}$ , то найдется такое число  $k_1$ , что при  $n > k_1$  будет выполняться неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ . Аналогично, если  $b$  — предел последовательности  $\{x_n\}$ , то найдется такое число  $k_2$ , что при  $n > k_2$  будет  $|x_n - b| < \varepsilon$ . Следовательно, если номер  $n$  больше и  $k_1$  и  $k_2$ , то выполняются оба неравенства  $|x_n - a| < \varepsilon$  и  $|x_n - b| < \varepsilon$ . А это невозможно, так как  $|a - b| = 2\varepsilon$ .

34. а) Покажем, что любой отрезок с центром в точке  $a$  является кормушкой. Пусть длина отрезка равна  $2\varepsilon$ . Нам нужно показать, что бесконечно много членов последовательности попадают на этот отрезок, т. е. удовлетворяют

неравенству  $|x_n - a| \leq \varepsilon$ . Предположим, что это не так. Тогда на нашем отрезке лежит только конечное число членов последовательности.

Пусть  $k$  — наибольший из номеров этих членов. (Если на нашем отрезке совсем нет членов последовательности, то положим  $k = 0$ ). Тогда все члены с номерами, большими  $k$ , лежат вне отрезка. Но это противоречит определению предельной точки: для любого  $k$  найдется номер  $n > k$  такой, что  $|x_n - a| < \varepsilon$ , и значит,  $x_n$  лежит на нашем отрезке.

б) Предположим противное, т. е. что  $a$  не является предельной точкой последовательности. Это значит, что для некоторого  $\varepsilon$  и некоторого  $k$  не найдется такого номера  $n > k$ , для которого  $|x_n - a| < \varepsilon$ . Другими словами, на некотором отрезке с центром в точке  $a$  лежит только конечное число (не более  $k$ ) членов последовательности. Мы пришли к противоречию с данным нам условием, по которому любой отрезок с центром в точке  $a$  является кормушкой для  $\{x_n\}$  и, значит, содержит бесконечно много членов последовательности.

35. Первый способ. Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Для заданного положительного  $\varepsilon$  существует такое число  $k_0$ , что при всех  $n > k_0$  выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Пусть теперь задано любое число  $k$ . Взяв номер  $n$  так, чтобы он был больше  $k_0$  и  $k$ , мы видим, что выполняются оба нужные нам неравенства

$$n > k \quad \text{и} \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Второй способ следует из решений задач 29а), 25а) и 34б).

36. Последовательность  $x_n = \frac{n+1}{n}$  имеет пределом число

1. Значит (см. задачу 35), число 1 — предельная точка для этой последовательности. Других предельных точек последовательность не имеет (см. задачи 30а) и 34а)).

б) Точки  $+1$  и  $-1$ , очевидно, являются предельными для последовательности  $x_n = (-1)^n$ . Для любой другой точки  $a$  можно построить такой отрезок с центром в точке  $a$ , в котором вообще нет ни одного члена последовательности. Поэтому других предельных точек последовательность не имеет.

в) Так как функция  $\sin x^\circ$  имеет период  $360^\circ$ , то каждое из чисел  $0, \pm \sin 1^\circ, \pm \sin 2^\circ, \dots, \pm \sin 89^\circ, \pm 1$  встречается в последовательности бесконечное число раз. Поэтому все эти числа являются предельными точками. Если число  $a$  не совпадает ни с одним из перечисленных 181 чисел, то можно построить отрезок с центром в точке  $a$ , не содержащий ни одного члена последовательности. (Для этого достаточно взять длину отрезка меньше, чем расстояние от точки  $a$  до ближайшего из указанных выше чисел.) Поэтому других предельных точек последовательность не имеет.

г) Эту последовательность удобно представлять себе как объединение двух последовательностей:  $y_n = 1/(2n-1)$  и  $z_n = 2n$ . Первая последовательность имеет единственную предельную точку 0, вторая вообще не имеет предельных точек. (Докажите эти утверждения самостоятельно.) Покажем теперь, что точка  $a$  является предельной для исходной последовательности тогда и только тогда, когда она является предельной хотя бы для одной из двух последовательностей  $\{y_n\}$  и  $\{z_n\}$ . В самом деле, если воспользоваться результатом задачи 34, то останется доказать следующее почти очевидное утверждение: любой отрезок является кормушкой для последовательности  $\{x_n\}$  тогда и только тогда, когда он является кормушкой хотя бы для одной из последовательностей  $\{y_n\}, \{z_n\}$ .

**З а м е ч а н и е.** Точно такими же рассуждениями доказывается общая теорема: если последовательность  $\{x_n\}$  является объединением конечного числа последовательностей  $\{y_n\}, \{z_n\}, \dots, \{t_n\}$ , то множество предельных точек для  $\{x_n\}$  получается объединением множеств предельных точек для  $\{y_n\}, \{z_n\}, \dots, \{t_n\}$ .

е) Если число  $a$  удовлетворяет условиям  $0 \leq a \leq 1$ , то на любом отрезке с центром в точке  $a$  лежит бесконечно много членов нашей последовательности. В самом деле, если длина отрезка равна  $2\varepsilon$ , то при любом  $n > 1/\varepsilon$  среди группы членов  $1/n; 2/n; \dots; (n-1)/n$  есть хотя бы один, лежащий на нашем отрезке. Если же  $a < 0$  или  $a > 1$ , то можно построить отрезок с центром в точке  $a$ , который не содержит ни одного члена последовательности.

Поэтому предельными точками нашей последовательности будут все точки отрезка  $[0, 1]$  и только они.

**37. а)** Пусть последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел  $x_0$ . Возьмем какой-нибудь отрезок  $[a, b]$  с центром в точке  $x_0$ . По определению предела, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство  $|x_n - x_0| \leq (b - a)/2$ . Значит, вне

отрезка расположено только конечное число членов последовательности. Пусть  $x_h$  — наибольший (по абсолютной величине) из этих членов. Обозначим через  $C$  наибольшее из чисел  $|a|$ ,  $|b|$ ,  $|x_h|$ . Тогда для всех членов последовательности будет справедливо неравенство  $|x_n| \leq C$ . В самом деле если  $x_n$  лежит на отрезке  $[a, b]$ , то  $|x_n|$  не превосходит наибольшего из чисел  $|a|$ ,  $|b|$ . Если же  $x_n$  не лежит на отрезке  $[a, b]$ , то  $|x_n| \leq |x_h|$  (так как  $x_h$  — наибольший по абсолютной величине среди членов последовательности, не лежащих на  $[a, b]$ ). Значит, и по-прежнему  $|x_n| \leq C$ .

б) Рассмотрим последовательность  $x_n = (-1)^n$ . Эта последовательность ограничена, так как  $|x_n| \leq 1$ . Покажем, что она не имеет предела. В самом деле, если бы некоторое число  $a$  являлось пределом  $\{x_n\}$ , то, начиная с некоторого номера, выполнялось бы  $|x_n - a| < 1/2$ . Тогда для всех членов с большими номерами мы могли бы написать

$$|x_m - x_n| = |(x_n - a) - (x_m - a)| \leq |x_m - a| + |x_n - a| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Таким образом, почти любые два члена отличались бы между собой меньше чем на 1. Но это неверно, так как

$$|x_n - x_{n+1}| = |(-1)^n - (-1)^{n+1}| = 2.$$

38. а) Пусть  $C$  — любое число. Для всех  $n > C$  справедливо неравенство  $|x_n| > C$ . Поэтому последовательность  $\{x_n\}$  стремится к бесконечности.

б) То же решение, что и в случае а).

в) Последовательность не ограничена, так как для любого положительного числа  $C$  найдется такой номер  $n$ , что  $|x_n| > C$  (достаточно в качестве  $n$  взять любое четное число, большее  $C$ ). Но эта последовательность не стремится к бесконечности, так как неравенство  $|x_n| > 1$  не выполняется для всех нечетных членов последовательности.

г) Пусть  $C$  — любое число. Для всех  $n > C^2$  выполняется неравенство  $|x_n| > C$ . Следовательно,  $x_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

д) Покажем, что последовательность  $\{x_n\}$  ограничена. Более точно, мы покажем, что  $|x_n| \leq 5$ . Поскольку  $x_n > 0$ , то  $|x_n| = x_n$ , и мы должны показать, что  $x_n \leq 5$ . А это вытекает из следующих соотношений:

$$5 - x_n =$$

$$= 5 - \frac{100n}{100 + n^2} = \frac{5}{100 + n^2} (100 + n^2 - 20n) = \frac{5 \cdot (10 - n)^2}{100 + n^2} \geq 0.$$

39. Мы разберем подробно только два примера.

1) Покажем, что условию 1) удовлетворяет любая последовательность  $\{x_n\}$ . В самом деле, мы должны показать, что найдется такое положительное число  $\varepsilon$ , такое число  $k$  и такой номер  $n > k$ , что  $|x_n - a| < \varepsilon$ . Возьмем в качестве  $\varepsilon$  число  $|x_1 - a| + 1$  и положим  $k = 0$ ,  $n = 1$ . Тогда требуемое условие будет выполнено.

2) Покажем, что условие 6) означает, что последовательность  $\{x_n\}$  не имеет числа  $a$  пределом. В самом деле, утверждение « $a$  является пределом последовательности  $\{x_n\}$ » означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $k$ , что для всех  $n > k$  верно неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ . Отрицание этого утверждения выглядит так: «не для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $k$ , что для всех  $n > k$  верно неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ ».

Эту фразу можно пересказать следующим образом: «для некоторого  $\varepsilon > 0$  не найдется такого  $k$ , что для всех  $n > k$  верно неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ ». А это можно сформулировать так: «найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что для любого  $k$  не для всех  $n > k$  верно неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ ». Наконец, эту фразу можно пересказать так: «найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что для любого  $k$  найдется  $n > k$ , для которого  $|x_n - a| \geq \varepsilon$ ».

Мы получили как раз условие 6). Обратите внимание на то, что это условие можно получить из определения предела по следующему правилу: 1) вместо слов «найдется такое, ... что» поставить «для любого»; 2) вместо слов «для любого» поставить «найдется такое, ... что»; 3) неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$  заменить на противоположное неравенство  $|x_n - a| \geq \varepsilon$ . Это правило применимо и ко всем остальным условиям. Проверьте, что оно дает для каждого условия формулировку отрицания этого условия.

40. б) Если набор начинается знаком  $+$ , то все члены последовательности равны  $a$ . Поэтому все остальные знаки набора однозначно определяются: последовательность имеет число  $a$  пределом и предельной точкой, она ограничена и не стремится к бесконечности.

Рассмотрим теперь наборы, которые начинаются знаками  $-$ ; это значит, что последовательность стремится к  $a$ . Тогда все остальные знаки набора определены: последовательность имеет  $a$  предельной точкой (задача 35), ограничена (задача 37а)) и не стремится к бесконечности.

Разберем еще наборы, у которых последний знак  $+$ . В этом случае последовательность стремится к бесконечно-

сти и это определяет все остальные знаки набора: последовательность не равна тождественно  $a$ , не стремится к  $a$ , не имеет  $a$  предельной точкой и не ограничена.

Остальные наборы имеют первым, вторым и пятым знаком —. Оказывается, что в этом случае на третьем и четвертом местах могут стоять любые знаки. Соответствующие примеры приведены в разделе «Ответы и указания».

41. В разделе «Ответы и указания» приведены примеры последовательностей, имеющих предел и имеющих либо наибольший, либо наименьший член, либо и тот и другой. Остается доказать, что не существует последовательности, имеющей предел, но не имеющей ни наибольшего, ни наименьшего члена.

Пусть последовательность  $\{x_n\}$  не имеет наибольшего члена. Покажем, что тогда можно выделить из последовательности  $\{x_n\}$  возрастающую подпоследовательность. В самом деле, рассмотрим первый член последовательности  $x_1$ . Так как он не наибольший, существует некоторый член  $x_{n_1} > x_1$ . Этот член  $x_{n_1}$  не может быть больше всех следующих за ним членов последовательности (так как в противном случае наибольший из первых  $n_1$  членов последовательности был бы наибольшим из всех членов). Поэтому существует такой номер  $n_2 > n_1$ , что  $x_{n_2} > x_{n_1}$ . Член  $x_{n_2}$  опять не может быть больше всех следующих за ним членов и т. д. Мы получили бесконечную возрастающую подпоследовательность

$$x_1 < x_{n_1} < x_{n_2} < \dots < x_{n_k} < \dots$$

Аналогично, если последовательность  $\{x_n\}$  не имеет наименьшего члена, то существует бесконечная убывающая подпоследовательность

$$x_1 > x_{m_1} > x_{m_2} > \dots > x_{m_k} > \dots$$

Обозначим через  $\varepsilon$  разность между  $x_{n_i}$  и  $x_{m_i}$ . Тогда при всех  $k > 1$  будет выполняться неравенство

$$x_{n_k} - x_{m_k}^{\circ} > x_{n_1} - x_{m_1} = \varepsilon.$$

Отсюда вытекает (ср. решение задач 32з) или 37б)), что последовательность  $\{x_n\}$  не имеет предела.

42. Если последовательность  $\{x_n\}$  или какая-нибудь ее подпоследовательность не имеют наибольшего члена, то, как показано в решении задачи 41, можно выделить из  $x_n$  бесконечную возрастающую подпоследовательность.



Рассмотрим теперь тот случай, когда в любой подпоследовательности есть наибольший член. Пусть  $x_{n_1}$  — наибольший из всех членов последовательности,  $x_{n_2}$  — наибольший из членов, следующих за  $x_{n_1}$ ,  $x_{n_3}$  — наибольший из членов, следующих за  $x_{n_2}$ , и т. д. Очевидно, справедливы неравенства

$$x_{n_1} \geq x_{n_2} \geq \dots \geq x_{n_k} \geq \dots$$

Итак, и в этом случае из последовательности  $\{x_n\}$  можно выделить монотонную подпоследовательность.

43. Пусть  $\alpha$  — бесконечная десятичная дробь, цифры которой образуют монотонную последовательность. Покажем, что у такой дроби все цифры, начиная с некоторой, совпадают между собой. В самом деле, пусть для определенности последовательность цифр невозрастающая. Предположим, что  $a$  — наименьшая из цифр, входящих в последовательность. Тогда все следующие за  $a$  цифры должны совпадать с  $a$ : они не могут быть больше  $a$ , так как последовательность невозрастающая, и не могут быть меньше  $a$ , так как  $a$  — наименьшая из цифр.

Итак, наша дробь имеет вид

$$\alpha = 0, \dots aaaa \dots$$

Это — смешанная периодическая дробь, которую можно записать в виде обыкновенной дроби со знаменателем вида  $9 \cdot 10^k$ .

44. Ясно, что наша последовательность монотонно убывает (каждый член получается из предыдущего вычитанием положительного числа). Докажем по индукции, что  $0 < x_n < 1$  для всех  $n$ . В самом деле, из равенства

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2 = x_n(1 - x_n)$$

видно, что если  $0 < x_n < 1$ , то  $x_{n+1}$  также заключено в интервале от 0 до 1.

По аксиоме Больцано—Вейерштрасса наша последовательность имеет предел  $a$ . Рассуждая так же, как на стр. 28, мы приходим к равенству  $a = a - a^2$ , откуда  $a = 0$ .

45. Рассмотрим последовательность 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ... В этой последовательности член  $x_n$  является приближенным (с недостатком) значением числа  $\sqrt{2}$  с точностью до  $1/10^n$ .

Из самого определения последовательности  $\{x_n\}$  вытекает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$  (при  $n > \lg(1/\epsilon)$  выполняется

неравенство  $|x_n - \sqrt{2}| < \varepsilon$ . Так как число  $\sqrt{2}$  иррационально и так как последовательность  $\{x_n\}$  может иметь только один предел, то никакое рациональное число не является пределом последовательности.

**З а м е ч а н и е.** В этом доказательстве мы использовали тот факт, что существует вещественное число, квадрат которого равен 2 и которое может быть записано бесконечной десятичной дробью. Можно так видоизменить наши рассуждения, чтобы в них фигурировали только рациональные числа. Для этого надо определить  $x_n$  как наибольшее из чисел, которые можно записать конечной десятичной дробью с  $n$  знаками после запятой и квадрат которых меньше 2. После этого нужно показать, что если  $x_n$  стремится к какому-нибудь числу  $a$ , то  $a^2 = 2$ .

Основная идея этого доказательства состоит в следующем.

Число  $x_n$  обладает тем свойством, что  $x_n^2$  меньше 2, но  $(x_n + \frac{1}{10^n})^2$  уже больше 2. Поэтому при больших  $n$  число  $x_n^2$  очень близко к 2. С другой стороны, при достаточно больших номерах  $n$  числа  $x_n$  и  $a$  близки, а значит, близки и числа  $x_n^2$  и  $a^2$ . Отсюда можно заключить, что разность между  $a^2$  и 2 как угодно мала. Но эта разность — постоянное число, не зависящее от  $n$ . Поэтому  $a^2 = 2$ . Остается доказать, что не существует рационального числа  $a$ , квадрат которого равен 2. Попробуйте самостоятельно довести изложенные здесь соображения до строгого доказательства.

**46.** Пусть дана ограниченная последовательность. Выберем из нее бесконечную монотонную подпоследовательность (см. решение задачи 42). Эта подпоследовательность ограничена и по аксиоме Больцано — Вейерштрасса имеет предел. Покажем, что этот предел является предельной точкой для исходной последовательности.

В самом деле, всякий отрезок с центром в этой точке является ловушкой для выбранной подпоследовательности. Поэтому на нем лежит бесконечное число членов исходной последовательности, т. е. этот отрезок — кормушка для исходной последовательности. Наше утверждение вытекает теперь из теоремы 34б).

**47. а)** Докажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$ . Нам нужно проверить, что для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдется такое число  $k$ , что  $|x_n + y_n - a - b| < \varepsilon$  при всех  $n > k$ . Так как, по условию,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , то найдется такое число  $k_1$ , что  $|x_n - a| < \varepsilon/2$  при  $n > k_1$ .

Точно так же из того, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , следует существование такого числа  $k_2$ , что  $|y_n - b| < \varepsilon/2$  при  $n > k_2$ .

Пусть  $k$  — наибольшее из чисел  $k_1$  и  $k_2$ . Тогда при  $n > k$  мы получим  $|x_n + y_n - a - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon$ .

б) Доказывается так же, как и а).

в) Покажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab$ . Для этого восполь-

зуемся тождеством

$$x_n y_n - ab = x_n y_n - b x_n + b x_n - ab = x_n (y_n - b) + b (x_n - a).$$

Так как последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел, то она ограничена (см. задачу 37а)), т. е. существует такое число  $C$ , что  $|x_n| \leq C$  при всех  $n$ . Пусть теперь нам задано любое положительное число  $\varepsilon$ . Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , то существует

такое число  $k_1$ , что при  $n > k_1$  выполняется неравенство  $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$ . Точно так же существует такое число  $k_2$ ,

что при  $n > k_2$  выполняется неравенство  $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2C}$ .

Пусть  $k$  обозначает наибольшее из чисел  $k_1, k_2$ . Тогда при  $n > k$  мы будем иметь

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &= |x_n (y_n - b) + b (x_n - a)| \leq \\ &\leq |x_n| \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a| < C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2|b|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

г) Допустим сначала, что  $b \neq 0$ . Покажем, что в этом случае последовательность  $\{1/y_n\}$  имеет предел  $1/b$ . Предположим для определенности, что  $b > 0$ . Так как  $y_n \rightarrow b$  при  $n \rightarrow \infty$ , существует такое число  $k_1$ , что при  $n > k_1$  выполняется неравенство  $|y_n - b| < b/2$ . Отсюда  $y_n - b > -b/2$ , или  $y_n > b/2$ , или  $1/y_n < 2/b$ .

Пусть задано любое положительное число  $\varepsilon$ . Существует такое  $k_2$ , что при  $n > k_2$  выполняется неравенство  $|y_n - b| < \varepsilon b^2/2$ . Пусть  $k$  — наибольшее из чисел  $k_1$  и  $k_2$ . Тогда при  $n > k$  мы получим

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n| \cdot |b|} < \frac{2}{b} \cdot \frac{\varepsilon b^2}{2} \cdot \frac{1}{b} = \varepsilon.$$

Мы доказали, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/y_n = 1/b$ . Теперь применим утвер-

ждение задачи 47в) к последовательностям  $\{x_n\}$  и  $\{1/y_n\}$ . Мы получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

З а м е ч а н и е. Некоторые члены последовательности  $\{y_n\}$  могут обращаться в нуль. Тогда выражение  $\frac{1}{y_n}$  не имеет смысла. Однако это

может случиться только с конечным числом членов. В самом деле, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство  $|y_n - b| < |b|$ , откуда  $y_n \neq 0$ .

Рассмотрим теперь случай  $b = 0$ . Может случиться, что бесконечно много членов последовательности  $\{y_n\}$  (или даже все члены, начиная с некоторого номера) обращаются в нуль. Тогда выражения  $x_n/y_n$  теряют смысл и мы не можем рассматривать последовательность  $\{x_n/y_n\}$ .

Покажем, что если  $a \neq 0$ , то даже в том случае, когда все  $y_n$  отличны от нуля, последовательность  $\{x_n/y_n\}$  не имеет предела. В самом деле, пусть  $c$  — любое число; найдется такое число  $k_1$ , что при  $n > k_1$  будет выполняться неравенство  $|y_n| < |a_n|/[2(|c| + 1)]$  (так как  $y_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ); найдется также такое число  $k_2$ , что при  $n > k_2$  будет  $|x_n - a| < |a|/2$ . Пусть  $k$  — наибольшее из чисел  $k_1$  и  $k_2$ . Тогда при  $n > k$  мы получим:

$$\left| \frac{x_n}{y_n} \right| > \frac{|a|}{2} \cdot \frac{2(|c| + 1)}{|a|} = |c| + 1.$$

Таким образом, число  $c$  не является пределом последовательности  $\{x_n/y_n\}$ .

Наконец, в случае  $a = b = 0$  последовательность  $\{x_n/y_n\}$  может иметь предел, а может и не иметь его (см. по этому поводу задачу 57).

48. а) Будем рассуждать от противного. Если бы существовал  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ , то из задачи 47б) мы получили бы, что последовательность  $\{y_n\}$  имеет предел, так как  $y_n = (x_n + y_n) - x_n$ . Но, по условию задачи,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  не существует. Полученное противоречие показывает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$  не существует.

б) Примеры

$$x_n = \frac{n-1}{n}, \quad y_n = (-1)^n \quad \text{и} \quad x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = (-1)^n$$

показывают, что могут встретиться оба случая.

49. Возможны оба случая, как показывают примеры:

1)  $x_n = (-1)^n, \quad y_n = (-1)^n;$

2)  $x_n = (-1)^n, \quad y_n = n.$

50. Пусть задано положительное число  $\varepsilon$ . Нам нужно доказать, что, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ . По условию существует такое число  $k_1$ , что при  $n \geq k_1$  выполняется неравенство  $|y_n - a| < \varepsilon$ , и

такое число  $k_2$ , что при  $n > k_2$  выполняется неравенство  $|z_n - a| < \varepsilon$ . Пусть  $k$  — наибольшее из чисел  $k_1$  и  $k_2$ . Тогда при  $n > k$  выполняются оба неравенства. Вспомним теперь, что по условию задачи  $y_n \leq x_n \leq z_n$ . Из неравенств  $|y_n - a| < \varepsilon$ ,  $|z_n - a| < \varepsilon$ ,  $y_n \leq x_n \leq z_n$  следует, что  $|x_n - a| < \varepsilon$ . (Докажите это самостоятельно, рассмотрев отдельно три случая:  $a < y_n$ ,  $y_n \leq a \leq z_n$ ,  $a > z_n$ .)

Значит, при всех  $n > k$  получим  $|x_n - a| < \varepsilon$ . Мы доказали, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

51. а) По формуле суммы геометрической прогрессии мы получаем

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Отсюда  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2$ .

б) Последовательность  $S_n = 1 + 1/4 + \dots + 1/n^2$ , очевидно, является возрастающей. Покажем, что она ограничена. В самом деле, так как  $1/n^2 < 1/n(n-1)$ , то

$$\begin{aligned} S_n &< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} = \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Итак,  $S_n < 2$  при всех  $n$ . Поэтому из аксиомы Больцано — Вейерштрасса следует, что существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

Методами высшей математики можно установить, что этот предел равен  $\frac{\pi^2}{6}$ . Элементарный вывод этого факта см. в книге: А. М. Яглом, И. М. Яглом, Неэлементарные задачи в элементарном изложении.

в) Очевидно, что подпоследовательность  $S_{2n}$ , составленная из членов с четными номерами, является возрастающей, так как

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} > 0,$$

и ограниченной, так как

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) - \dots - \left(\frac{1}{4n-5} - \frac{1}{4n-3}\right) - \\ &\quad - \frac{1}{4n-1} < 1. \end{aligned}$$

через  $a$  и покажем, что число  $a$  является пределом всей последовательности  $\{S_n\}$ . В самом деле, пусть задано любое положительное число  $\varepsilon$ . Тогда найдется такое число  $k$ , что при  $2n > k$  будет выполняться неравенство  $|S_2 - a| < \varepsilon/2$ . Кроме того, при  $2n + 1 > 1/\varepsilon$  выполняется неравенство

$$|S_{2n+1} - S_{2n+2}| = \frac{1}{4n+3} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому если номер  $n$  больше наибольшего из чисел  $k$  и  $1/\varepsilon$ , то  $|S_n - a| < \varepsilon$ .

Оказывается, что  $a = \pi/4$  (доказательство см., например, в цитированной выше книге А. М. Яглома и И. М. Яглома).

52. Рассмотрим последовательности  $\{S_n\}$  и  $\{S_{n-1}\}$ , где

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Если ряд  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  сходится, то обе последовательности имеют один и тот же предел  $S$ . Поэтому (см. задачу 476))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Отметим, что условие  $a_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  является необходимым, но не достаточным для того, чтобы сходился ряд  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ . Например, если  $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  (ср. задачу 60). С другой стороны,  $S_n = (1-0) + (\sqrt{2}-1) + \dots + (\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) = \sqrt{n}$ . Поэтому  $S_n \rightarrow \infty$  и ряд расходится.

53. Так как последовательность  $a_n$  убывающая, можно написать неравенства

$$\begin{array}{c} a_2 \leq a_2 \leq a_1, \\ 2a_4 \leq a_3 + a_4 \leq 2a_2, \\ 4a_8 \leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leq 4a_4, \\ \vdots \\ 2^n a_{2^{n+1}} \leq a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \dots + a_{2^{n+1}} \leq 2^n a_{2^n}. \end{array}$$

Складывая эти неравенства, мы получим

$$\frac{1}{2}(C_n - a_1) \leq S_{2n+1} - a_1 \leq C_n,$$

где  $S_n$  — сумма первых  $n$  членов ряда  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ ,  
а  $C_n$  — сумма первых  $n$  членов ряда  $a_1 + 2a_2 + \dots + 2^n a_n + \dots$

Так как последовательности  $\{S_n\}$  и  $\{C_n\}$  возрастающие, то по аксиоме Больцано — Вейерштрасса для того, чтобы

они имели предел, достаточно доказать, что они ограничены. Но из полученных нами неравенств следует, что если одна из последовательностей ограничена, то ограничена и вторая. В самом деле, если  $|S_n| \leq M$  при всех  $n$ , то  $|C_n| \leq 2S_{n+1} - a_1 \leq 2M$ ; если же  $|C_n| \leq M$  при всех  $n$ , то  $|S_n| \leq S_{2n+1} \leq C_n + a_1 \leq M + a_1$ .

54. Воспользуемся результатом задачи 49 и вместо ряда

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

рассмотрим ряд

$$1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \dots + \frac{2^n}{2^{np}} + \dots$$

Члены этого ряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем  $q = \frac{1}{2^{p-1}}$ . По формуле суммы геометрической прогрессии мы имеем  $S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$ . Если  $0 < q < 1$ , то последовательность  $\{S_n\}$  стремится к  $\frac{1}{1 - q}$ , а если  $q > 1$ , то  $S_n \rightarrow \infty$  (докажите эти утверждения самостоятельно). Наконец, если  $q = 1$ , то формула для суммы теряет смысл: ее числитель и знаменатель обращаются в нуль. Но в этом случае сумма легко вычисляется без всяких формул, так как при  $q = 1$  все члены последовательности равны 1. Отсюда  $S_n = n$  и ряд расходится. Остается вспомнить, что  $q = \frac{1}{2^{p-1}}$ .

Окончательный ответ: ряд сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p \leq 1$ .

55. Ошибка во всех случаях состоит в том, что формулы

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \end{aligned}$$

применяются, когда последовательности  $\{x_n\}$  или  $\{y_n\}$  не имеют предела. Запись  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  является просто кратким выражением того факта, что члены последовательности  $\{x_n\}$  по абсолютной величине неограниченно возрастают. Поэтому с символом  $\infty$  нельзя обращаться как с обычными числами. В частности, нельзя писать

$$\infty - \infty = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\infty}{\infty} = 1 \quad \text{или} \quad \infty \cdot 0 = 0.$$

56. а) Мы должны доказать, что для любого числа  $C$  найдется такой номер  $k$ , что при  $n > k$  будет выполняться неравенство  $|x_n + y_n| > C$ . Сначала найдем такое число  $k_1$ , что при  $n > k_1$  будет выполняться неравенство  $|x_n| > C + |a| + 1$ . Это возможно, так как  $x_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Затем найдем такое число  $k_2$ , что при  $n > k_2$  выполняется неравенство  $|y_n - a| < 1$ . Это возможно, так как  $y_n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ . Пусть  $k$  — наибольшее из чисел  $k_1$  и  $k_2$ . При  $n > k$  мы имеем

$$|x_n + y_n| \geq |x_n| - |y_n| > C + |a| + 1 - (|a| + 1) = C.$$

б) Пусть задано положительное число  $\varepsilon$ . Найдем такое число  $k_1$ , что при  $n > k_1$  выполняется неравенство  $|y_n - a| < 1$ . Затем найдем такое  $k_2$ , что при  $n > k_2$  выполняется неравенство  $|x_n| > \frac{|a| + 1}{\varepsilon}$ . Пусть  $k$  — наибольшее из чисел  $k_1$  и  $k_2$ . Тогда при  $n > k$  мы получим

$$\left| \frac{y_n}{x_n} \right| = \frac{|y_n|}{|x_n|} < \frac{|a| + 1}{\frac{|a| + 1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

58. Пользуясь правилами, сформулированными в начале параграфа, мы можем написать

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{3n - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{5}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{5}{n}\right)} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{10}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{3}{n}\right)} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1. \end{aligned}$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{2^n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)} = \frac{1}{1} = 1.$$



59. Докажем по индукции, что сумма  $1^k + 2^k + \dots + n^k$  является многочленом от  $n$  степени  $k+1$  со старшим членом  $\frac{1}{k+1} n^{k+1}$ . При  $k=1$  сумма  $1^k + 2^k + \dots + n^k$  равна  $\frac{n(n+1)}{2}$ , т. е. действительно является многочленом от  $n$  степени  $k+1=2$  со старшим коэффициентом  $\frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}$ .

Предположим, что наше утверждение верно для всех целых  $k < k_0$ . Докажем, что оно верно и для  $k_0$ . Для этого рассмотрим набор равенств, которые следуют из формулы бинома:

$$\begin{aligned}(n+1)^{k_0+1} &= n^{k_0+1} + (k_0+1)n^{k_0} + \dots + 1, \\ n^{k_0+1} &= (n-1)^{k_0+1} + (k_0+1)(n-1)^{k_0} + \dots + 1, \\ (n-1)^{k_0+1} &= (n-2)^{k_0+1} + (k_0+1)(n-2)^{k_0} + \dots + 1, \\ &\vdots \\ 2^{k_0+1} &= 1^{k_0+1} + (k_0+1) \cdot 1^{k_0} + \dots + 1.\end{aligned}$$

Складывая все эти равенства и учитывая, что все слагаемые в левой части, кроме  $(n+1)^{k_0+1}$ , взаимно уничтожаются с соответствующими слагаемыми в правой части, мы получим

$$(n+1)^{k_1+1} = 1 + (k_0+1)[n^{k_0} + (n-1)^{k_0} + \dots + 1^{k_0}] + \dots + n.$$

По предположению индукции, все члены, обозначенные многоточием, являются многочленами от  $n$  степени  $\leq k_0$ . Мы можем отсюда написать

$$1^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + n^{k_0} = \frac{(n+1)^{k_0+1}}{k_0+1} + P(n),$$

где  $P(n)$  — многочлен от  $n$  степени не выше  $k_0$ . Раскрывая выражение  $(n+1)^{k_0+1}$  по формуле бинома, окончательно получаем

$$1^{k_0} + 2^{k_0} + \dots + n^{k_0} = \frac{n^{k_0+1}}{k_0+1} + Q(n),$$

где  $Q(n)$  — многочлен степени  $\leq k_0$ . Утверждение доказано.

Приведем в качестве примера точное выражение для суммы  $S_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$  для нескольких значений  $k$ :

$$S_0(n) = n,$$

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n,$$

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n,$$

$$S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2.$$

Общая формула суммы  $S_k(n)$  для любого  $k$  содержит замечательные «числа Бернулли». Ее можно посмотреть в книге: А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей.

Теперь мы можем вычислить наш предел:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^{k+1}}{k+1} + a_1 n^k + \dots + a_{k+1}}{n^{k+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{k+1} + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \dots + \frac{a_{k+1}}{n^{k+1}} \right) = \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

60. Имеем:  $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}.$

Поэтому  $|x_n| = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} < \frac{1}{\sqrt{n-1}}.$  Отсюда вытекает,

что при  $n > 1 + \frac{1}{\varepsilon^2}$  выполняется неравенство  $|x_n| < \varepsilon.$

61. Преобразуем рассматриваемое выражение:

$$\frac{2}{1-x_n^2} - \frac{1}{1-x_n} = \frac{2-(1+x_n)}{1-x_n^2} = \frac{1-x_n}{1-x_n^2} = \frac{1}{1+x_n}.$$

(Мы можем сократить числитель и знаменатель на  $1-x_n$ , так как по условию  $x_n \neq 1$ .) Теперь можно написать:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x_n)} = \frac{1}{1+\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

62. Воспользуемся тем, что

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \dots > n + \frac{n(n-1)}{2} > \frac{n^2}{2}.$$

Поэтому

$$|x_n| = \frac{n}{2^n} < \frac{n}{\frac{n^2}{2}} = \frac{2}{n}.$$

При  $n > \frac{2}{\varepsilon}$  будет выполняться неравенство  $|x_n| < \varepsilon$ .

63. Воспользуемся тем, что

$$a^n = [1 + (a - 1)]^n = \\ = 1 + n(a - 1) + \frac{n(n-1)}{2}(a - 1)^2 + \dots > \frac{n(n-1)}{2} \cdot (a - 1)^2.$$

$$\text{Поэтому } |x_n| = \frac{n}{a^n} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2} \cdot (a-1)^2} = \frac{2}{(n-1)(a-1)^2}.$$

Для любого положительного  $\varepsilon$  при  $n > 1 + \frac{2}{\varepsilon(a-1)^2}$  мы будем иметь  $|x_n| < \varepsilon$ .

64. Пусть число  $n$  заключено между  $2^{m-1}$  и  $2^m$ , тогда  $\log_2 n$  заключен между  $m-1$  и  $m$ . Следовательно, выражение  $\frac{\log_2 n}{n}$  не превосходит величины  $\frac{m}{2^{m-1}}$ . Но мы знаем (см. задачу 62), что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $k$ , что при  $m > k$  выполняется неравенство  $\frac{m}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}$  или  $\frac{m}{2^{m-1}} < \varepsilon$ . Покажем, что при  $n > 2^k$  будет выполняться неравенство  $\frac{\log_2 n}{n} < \varepsilon$ . В самом деле, если  $n > 2^k$ , то  $n$  заключено между  $2^{m-1}$  и  $2^m$ , где  $m > k$ . Поэтому  $\frac{\log_2 n}{n} < \frac{m}{2^{m-1}} < \varepsilon$ .

65. Покажем, что для каждого положительного  $\varepsilon$  существует такое число  $k$ , что при  $n > k$  выполняется неравенство  $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$ . Так как  $\sqrt[n]{n} > 1$ , то  $|\sqrt[n]{n} - 1| = \sqrt[n]{n} - 1$ . Посмотрим, при каких  $n$  неравенство  $\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$  не выполняется. Другими словами, при каких  $n$  выполняется неравенство  $\sqrt[n]{n} - 1 \geq \varepsilon$  или  $\sqrt[n]{n} \geq 1 + \varepsilon$ , или  $n \geq (1 + \varepsilon)^n$ . Так как

$$(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + \dots > \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2,$$

то из неравенства  $n \geq (1 + \varepsilon)^n$  вытекает, что  $n > \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$ , откуда  $n < 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$ . Поэтому для всех  $n > 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$  неравенство  $\sqrt[n]{n} - 1 \geq \varepsilon$  неверно, и следовательно, верно неравенство  $\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$ .

66. а) Сравним два соседних члена последовательности. Для удобства обозначим через  $b$  корень степени  $n(n+1)$  из  $a$ . Тогда мы получим

$$\begin{aligned}x_n &= n(\sqrt[n]{a} - 1) = n(b^{n+1} - 1) = \\&= n(b-1)(b^n + b^{n-1} + \dots + 1); \\x_{n+1} &= (n+1)(\sqrt[n+1]{a} - 1) = (n+1)(b^n - 1) = \\&= (n+1)(b-1)(b^{n-1} + b^{n-2} + \dots + 1).\end{aligned}$$

Отсюда  $x_n - x_{n+1} = (b-1)(nb^n - b^{n-1} - b^{n-2} - \dots - 1)$ . При  $b > 1$  оба множителя положительны (так как в этом случае  $b^n > b^{n-1} > b^{n-2} > \dots > 1$ ); при  $b < 1$  — оба отрицательны; при  $b = 1$  они равны нулю. Отсюда  $x_n - x_{n+1} \geq 0$  во всех случаях. Мы доказали, что последовательность  $\{x_n\}$  монотонно убывает. С другой стороны, если  $a \geq 1$ , то  $x_n \geq 0$ , т. е. наша последовательность ограничена снизу. По аксиоме Больцано — Вейерштрасса она имеет предел.

Случай  $a < 1$  сводится к уже разобранному следующим приемом. Положим  $a = \frac{1}{b}$ , тогда

$$x_n = n(\sqrt[n]{a} - 1) = n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{b}} - 1\right) = -\frac{1}{\sqrt[n]{b}} n(\sqrt[n]{b} - 1).$$

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\sqrt[n]{b}}\right)$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{b} - 1)$  существуют, то существуют и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Отметим, что мы доказали заодно соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = -\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{b} - 1).$$

б) Первое равенство следует из соотношений

$$\begin{aligned}l(ab) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{ab} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{ab} - \sqrt[n]{b}) + \\&+ \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{b} - 1) = l(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b} + l(b) = l(a) + l(b).\end{aligned}$$

Мы воспользовались здесь равенством  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b} = 1$ . Докажите его самостоятельно.

Второе равенство мы докажем сначала для  $p$  натуральных, затем для целых, затем для рациональных и, наконец,

для иррациональных. Для натурального  $p$  равенство  $l(a^p) = pl(a)$  выводится по индукции из равенства  $l(ab) = l(a) + l(b)$ .

Для целого отрицательного  $p$  искомое равенство получается с помощью соотношения  $l(a^{-1}) = -l(a)$ , доказанного в решении задачи а). Для рационального числа  $p = m/n$  равенство  $l(a^p) = pl(a)$  доказывается так. Положим  $b = \sqrt[n]{a}$ . Тогда  $a = b^n$ ,  $a^p = b^m$ . Как уже доказано,

$$l(b^n) = nl(b), \quad l(b^m) = ml(b).$$

Отсюда  $l(b^m) = \frac{m}{n} l(b^n)$ , что и требовалось доказать.

Наконец, рассмотрим случай иррационального  $p$ . Воспользуемся тем, что  $l(b) \geq l(a)$  при  $b > a$  (так как  $n(\sqrt[n]{b} - 1) > n(\sqrt[n]{a} - 1)$ ). Посмотрим, когда может быть равенство  $l(b) = l(a)$ . Если такое равенство возможно при  $b \neq a$ , то, полагая  $c = b/a$ , мы получаем  $l(c) = l(b) - l(a) = 0$ . Так как  $c \neq 1$ , то для любого числа  $x$  можно найти такие целые числа  $m$  и  $n$ , что  $c^m < x < c^n$  (например, если  $c > 1$ , то достаточно взять  $m < \log_c x$ ,  $n > \log_c x$ ). Отсюда

$$0 = ml(c) \leq l(x) \leq nl(c) = 0.$$

Мы видим, что  $l(x) = 0$  для всех  $x$ . Позже, в решении задачи 676), мы покажем, что это не так. Здесь же отметим, что формула  $l(a^p) = pl(a)$  в этом случае, очевидно, верна.

Рассмотрим теперь случай, когда функция  $l(x)$  не равна тождественно нулю. Тогда равенство  $l(a) = l(b)$  возможно только при  $a = b$ . В частности, при  $a > 1$  должно быть  $l(a) > l(1) = 0$ . Предположим, что равенство  $l(a^p) = pl(a)$  не выполняется. Пусть, например,  $l(a^p) > pl(a)$  для некоторого  $a > 1$  (остальные случаи разбираются аналогично или сводятся к этому). Возьмем внутри отрезка  $\left[p, \frac{l(a^p)}{l(a)}\right]$  какое-нибудь рациональное число  $\frac{m}{n}$ . Тогда

$$p < \frac{m}{n} < \frac{l(a^p)}{l(a)}.$$

Отсюда  $l(a^p) > \frac{m}{n} l(a) = l\left(a^{\frac{m}{n}}\right)$ . С другой стороны, так как  $p < \frac{m}{n}$ , то  $a^p < a^{\frac{m}{n}}$  и, следовательно,  $l(a^p) < l\left(a^{\frac{m}{n}}\right)$ .

Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно. Итак, формула  $l(a^p) = pl(a)$  доказана во всех случаях.

67. а) Воспользуемся формулой  $l(a^p) = pl(a)$ , доказанной в решении задачи 61б). Мы имеем

$$l(a) = l(10^{\lg a}) = \lg a \cdot l(10).$$

Отсюда  $\frac{l(a)}{\lg a} = l(10)$ , и следовательно, не зависит от  $a$ .

б) Предположим противное, т. е. что  $M = l(10) = 0$ . Тогда функция  $l(a)$  тождественно равна нулю. Но легко показать, что  $l(a) < 0$  при  $a < 1$ . В самом деле, последовательность  $x_n = n(\sqrt[n]{a} - 1)$  — убывающая (см. решение задачи 66а)) и  $x_1 = a - 1$ . Отсюда следует, что  $l(a) < a - 1$  при всех  $a$ ; в частности,  $l(a) < 0$  при  $a < 1$ .

Используя равенство  $l(a^{-1}) = -l(a)$ , можно получить для  $l(a)$  оценку снизу:

$$l(a) = -l(a^{-1}) > 1 - a^{-1}.$$

в) Положим  $e = 10^{\frac{1}{l(10)}}$ . Тогда  $\lg e = \frac{1}{l(10)}$  и  $l(a) = l(10) \lg a = \frac{\lg a}{\lg e} = \log_e a$ . Так как  $l(10) > 0$ , то  $e > 1$ .

68. а) Пусть, для определенности,  $a < b$ . Тогда

$$\sqrt[p]{\frac{a^p + b^p}{2}} < \sqrt[p]{\frac{2b^p}{2}} = b.$$

С другой стороны,

$$\sqrt[p]{\frac{a^p + b^p}{2}} > \sqrt[p]{\frac{2a^p}{2}} = a.$$

Значит,  $S_p(a, b)$  заключено между  $a$  и  $b$ .

б) Сравним квадраты чисел  $S_1(a, b)$  и  $S_2(a, b)$ :

$$[S_1(a, b)]^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4},$$

$$[S_2(a, b)]^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{2a^2 + 2b^2}{4}.$$

Отсюда

$$[S_2(a, b)]^2 - [S_1(a, b)]^2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Так как  $S_2(a, b)$  и  $S_1(a, b)$  положительны, отсюда следует, что  $S_2(a, b) \geq S_1(a, b)$ .

Неравенство  $S_{-2}(a, b) \leq S_{-1}(a, b)$  доказывается аналогично. Рассмотрим теперь разность:

$$S_1(a, b) - S_{-1}(a, b) = \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \geq 0.$$

Доказанные неравенства являются частными случаями общей теоремы:

$$S_p(a, b) \geq S_q(a, b) \text{ при } p > q,$$

причем равенство возможно только при  $a = b$ .

69. а) Пусть сначала  $a \geq b$ . Тогда

$$S_n(a, b) = \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}} = a \sqrt[n]{\frac{1 + (b/a)^n}{2}}. \text{ Так как } b/a \leq 1, \text{ то } 1 < 1 + (b/a)^n \leq 2; \text{ отсюда}$$

$$a \sqrt[n]{1/2} < S_n(a, b) \leq a.$$

Но  $\lim_{n \rightarrow \infty} a \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = a$ . По «теореме о двух милиционерах» (см. задачу 50) должно быть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(a, b) = a.$$

Аналогично доказывается, что при  $b > a$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(a, b) = b.$$

Таким образом, во всех случаях предел равен наибольшему из чисел  $a$  и  $b$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(a, b) = \max(a, b).$$

$$\text{б) } S_{-n}(a, b) = \left( \frac{a^{-n} + b^{-n}}{2} \right)^{-1/n} = [S_n(a^{-1}, b^{-1})]^{-1}. \text{ Отсюда}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{-n}(a, b) &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(a^{-1}, b^{-1})} = \\ &= \frac{1}{\max(a^{-1}, b^{-1})} = \min(a, b) \end{aligned}$$

(наименьшее из чисел  $a, b$ ).

в) Заметим сначала, что  $\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} \geq \sqrt[n]{a^{1/n} b^{1/n}}$ , так как

$$\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} - \sqrt[n]{a^{1/n} b^{1/n}} = \frac{(a^{1/2n} - b^{1/2n})^2}{2} \geq 0.$$

Отсюда

$$S_{1/n}(a, b) = \left( \frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} \right)^n \geq (V a^{1/n} b^{1/n})^n = V ab.$$

Покажем теперь, что  $S_{1/n}(a, b)$  стремится к  $V ab$  при  $n \rightarrow \infty$ . Для этого воспользуемся неравенством  $\ln a < a - 1$ , доказанным в решении задачи 676). Мы получим

$$\begin{aligned} \ln S_{1/n}(a, b) &= n \cdot \ln \frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} \leq n \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{2} [n(\sqrt[n]{a} - 1) + n(\sqrt[n]{b} - 1)]. \end{aligned}$$

В последней сумме первое слагаемое стремится к  $\ln a$ , а второе — к  $\ln b$ .

Поэтому для любого положительного  $\varepsilon$  найдется такой номер  $k$ , что при  $n > k$  будет выполняться неравенство

$$\ln S_{1/n}(a, b) < 1/2 (\ln a + \ln b) + \varepsilon$$

или

$$S_{1/n}(a, b) < V ab \cdot e^\varepsilon.$$

Пусть теперь задано положительное число  $\varepsilon_1$ . Положим  $\varepsilon = \ln \left( 1 + \frac{\varepsilon_1}{V ab} \right)$  и найдем число  $k$ , как указано выше.

Тогда при  $n > k$  мы получим

$$S_{1/n}(a, b) < V ab \cdot e^\varepsilon = V ab + \varepsilon_1.$$

Мы доказали, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{1/n}(a, b) = V ab.$$

Этот результат показывает, что в качестве среднего нулевого порядка  $S_0(a, b)$  естественно взять среднее геометрическое чисел  $a$  и  $b$ .

Отметим, что средние порядков  $p$  и  $-p$  связаны простым соотношением:

$$S_p(a, b) \cdot S_{-p}(a, b) = ab$$

(докажите это равенство самостоятельно).

Если положить  $S_0(a, b) = V ab$ , то это соотношение будет справедливо и при  $p = 0$ .

70. Пусть  $a_n$  — число способов, при которых ни одно письмо не попадает в свой конверт. Вычислим, сколько существует способов, при которых ровно  $k$  писем попадают



в свои конверты. Известно, что  $k$  писем из  $n$  можно выбрать  $C_n^k$  способами. Положим выбранные  $k$  писем в соответствующие конверты, а остальные  $n - k$  писем разложим так, чтобы ни одно письмо не попало в свой конверт. Это можно сделать  $a_{n-k}$  способами. Итак, всего способов, при которых ровно  $k$  писем попадают к адресатам, будет  $C_n^k \cdot a_{n-k}$ . Заметим, что при  $k = n$  наше рассуждение теряет силу, так как  $a_0$  не определено. Чтобы найденное выражение давало правильный ответ и при  $k = n$ , нужно положить  $a_0 = 1$ . С другой стороны, общее количество способов равно  $n!$ . Мы получаем равенство

$$a_n + na_{n-1} + C_n^2 a_{n-2} + \dots + na_1 + a_0 = n!.$$

Разделим обе части равенства на  $n!$  и обозначим  $a_n/n!$  через  $p_n$ . Мы получим

$$p_n + p_{n-1} + \frac{1}{2} p_{n-2} + \frac{1}{3!} p_{n-3} + \dots + \frac{1}{n!} p_0 = 1.$$

Эта формула позволяет последовательно находить числа  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

В самом деле, так как  $a_0 = 1$ , то  $p_0 = 1$ . При  $n = 1$  наша формула дает  $p_1 + p_0 = 1$ , откуда  $p_1 = 0$ . (Это равенство можно получить непосредственно, вспомнив определение числа  $a_1$  — это количество способов, которыми можно разложить одно письмо в один конверт так, чтобы оно не попало по адресу.)

При  $n = 2$  мы получаем:

$$p_2 + p_1 + \frac{1}{2} p_0 = 1, \text{ откуда } p_2 = \frac{1}{2}.$$

При  $n = 3$ :

$$p_3 + p_2 + \frac{1}{2} p_1 + \frac{1}{3!} p_0 = 1, \text{ откуда } p_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3!}.$$

При  $n = 4$

$$p_4 + p_3 + \frac{1}{2} p_2 + \frac{1}{3!} p_1 + \frac{1}{4!} p_0 = 1,$$

откуда

$$p_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}, \text{ и т. д.}$$

Эти вычисления, естественно, приводят к предположению, что  $p_n$  выражается формулой (где  $n \geq 2$ )

$$p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Докажите это самостоятельно методом индукции, используя основную формулу.

Остается показать, что последовательность  $\{p_n\}$  имеет предел. Это делается в точности так же, как и в решении задачи 51в).

Обозначим  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$  через  $p$ . Мы можем теперь найти предельную вероятность того, что ровно  $k$  писем попадут к адресатам. В самом деле, выше мы нашли, что число таких способов равно  $C_n^k a_{n-k}$ . Отношение этого числа к  $n!$  равно  $\frac{a_{n-k}}{(n-k)! k!}$ . Предел этого отношения при  $n \rightarrow \infty$  равен

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-k}}{(n-k)! k!} = \frac{1}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{p}{k!}.$$

Если мы сложим все найденные вероятности, то в сумме должна получиться единица. Отсюда

$$p + \frac{p}{1!} + \frac{p}{2!} + \dots + \frac{p}{n!} + \dots = 1$$

или

$$p \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \right) = 1.$$

В задаче 67 мы говорили о том, что сумма ряда, стоящего в скобках, равна числу  $e$ .

Таким образом, при  $n \rightarrow \infty$  вероятность того, что ровно  $k$  писем попадут к адресатам, стремится к  $\frac{1}{k!e}$ .

71. Будем пользоваться обозначениями, принятыми в указании к этой задаче. После первого шага улитка попадет в точку с координатами  $(a+1, b)$ , после второго — в точку с координатами  $(a+1, b+1)$  и т. д. После  $2n$ -го шага она будет в точке  $(a+n, b+n)$ , а после  $(2n+1)$ -го — в точке  $(a+n+1, b+n)$ . Поэтому

$$k_{2n} = \frac{b+n}{a+n}; \quad k_{2n+1} = \frac{b+n}{a+n+1}.$$

Остается найти предел последовательности  $k_n$ . Обозначим  $k_{2n}$  через  $k'_n$ , а  $k_{2n+1}$  — через  $k''_n$ . Легко проверить, что последовательности  $\{k'_n\}$  и  $\{k''_n\}$  стремятся к 1. Поэтому для любого  $\epsilon$  найдется такое число  $l_1$ , что при  $n > l_1$  будет выполняться неравенство  $|k'_n - 1| < \epsilon$ . Точно так же найдется такое число  $l_2$ , что при  $n > l_2$  будет выполняться неравенство  $|k''_n - 1| < \epsilon$ . Обозначим через  $l$

наибольшее из чисел  $2l_1$  и  $2l_2 + 1$ . Тогда при  $n > l$  будет выполняться неравенство  $|k_n - 1| < \epsilon$ .

72. Сохраним обозначения, принятые в указании и решении задачи 71.

а) В этом случае  $k'_n = k_{2n} = \frac{b + 2n}{a + n},$

$$k''_n = k_{2n+1} = \frac{b + 2n}{a + n + 1}.$$

Мы получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} k''_n = 2.$$

Отсюда, как и выше, выводится, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n$  существует и равен 2.

б) В этом случае

$$k'_n = k_{2n} = \frac{b + 2 + 4 + \dots + 2n}{a + 1 + 3 + \dots + 2n - 1} = \frac{b + n^2 + n}{a + n^2};$$

$$k''_n = k_{2n+1} = \frac{b + 2 + 4 + \dots + 2n}{a + 1 + 3 + \dots + 2n + 1} = \frac{b + n^2 + n}{a + n^2 + 2n + 1}.$$

Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} k''_n = 1,$$

и, как и выше, доказывается, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n$  существует и равен 1.

в) В этом случае

$$k'_n = k_{2n} = \frac{b + 2 + 8 + \dots + 2^{2n-1}}{a + 1 + 4 + \dots + 2^{2n-2}} = \frac{b + 2 \frac{4^n - 1}{4 - 1}}{a + \frac{4^n - 1}{4 - 1}};$$

$$k''_n = k_{2n+1} = \frac{b + 2 + 8 + \dots + 2^{2n-1}}{a + 1 + 4 + \dots + 2^{2n}} = \frac{b + 2 \frac{4^n - 1}{4 - 1}}{a + \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1}}.$$

Отсюда видно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k'_n = 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k''_n = 1/2.$$

Покажем, что последовательность  $\{k_n\}$  в этом случае не имеет предела. В самом деле, если некоторая последовательность имеет предел  $a$ , то любая ее подпоследовательность имеет тот же самый предел. Докажете это самостоятельно, используя, например, задачи 29а) и б),

Но в нашем случае подпоследовательности  $\{k_{2n}\}$  и  $\{k_{2n+1}\}$  имеют разные пределы.

73. Из подобия треугольников  $A_0M_nP_0$  и  $A_nM_nP_n$  (рис. 24) мы получаем

$$M_nP_0 : M_nP_n = P_0A_0 : P_nA_n.$$

Обозначим абсциссу точки  $M_n$  через  $x_n$ . Тогда полученную пропорцию можно переписать так:

$$(a - x_n) : \left(a + \frac{1}{n} - x_n\right) = \\ = a^2 : \left(a + \frac{1}{n}\right)^2.$$

Отсюда получается выражение для  $x_n$ :

$$x_n = \frac{a(an + 1)}{2an + 1} = \frac{a\left(a + \frac{1}{n}\right)}{2a + \frac{1}{n}}.$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a\left(a + \frac{1}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2a + \frac{1}{n}\right)} = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}.$$

Геометрически полученный ответ можно сформулировать так: касательная, проведенная к любой точке параболы, делит пополам отрезок, соединяющий вершину параболы с проекцией точки касания на ось  $Ox$ .

74. Пусть мальчик Петя вышел из точки  $A_1$ . Обозначим через  $B, C, D$  соответственно точки, в которых расположены школа, кинотеатр и каток (рис. 25).

Путь мальчика Пети изобразится ломаной  $A_1A_2A_3\dots$ , в которой точка  $A_2$  — середина отрезка  $A_1B$ , точка  $A_3$  — середина отрезка  $A_2C$ , точка  $A_4$  — середина отрезка  $A_3D$  и т. д. Докажем, что точки  $A_1, A_4, A_7, \dots, A_{3n+1}, \dots$  лежат на одной прямой. В самом деле, отрезок  $A_2A_5$  является средней линией в треугольнике  $A_1BA_4$ , поэтому этот отрезок параллелен  $A_1A_4$ , а длина его вдвое меньше. Точно так же, рассматривая треугольник  $A_2CA_5$ , мы выводим, что отрезок  $A_3A_6$  параллелен  $A_2A_5$ , а длина его вдвое меньше. Наконец, из

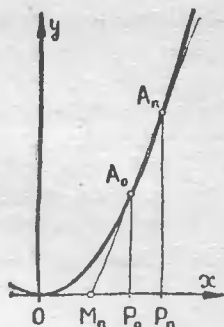


Рис. 24.

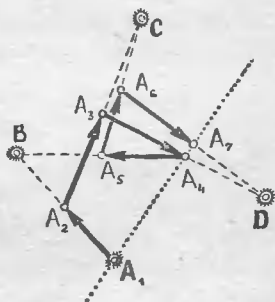


Рис. 25.

треугольника  $A_3DA_6$  мы получаем, что отрезок  $A_4A_7$  параллелен  $A_3A_6$  и имеет вдвое меньшую длину. Сравнивая полученные результаты, мы видим, что отрезки  $A_1A_4$  и  $A_4A_7$  являются продолжением друг друга, причем длина  $A_4A_7$  в 8 раз меньше длины  $A_1A_4$ .

Точно так же устанавливается, что отрезок  $A_7A_{10}$  является продолжением отрезка  $A_4A_7$ , отрезок  $A_{10}A_{13}$  — продолжением отрезка  $A_7A_{10}$  и т. д. Итак, точки  $A_1, A_4, A_7, \dots, A_{3n+1}, \dots$  лежат на одной прямой. Мы доказали также, что расстояния между этими точками образуют геометрическую прогрессию со знаменателем  $\frac{1}{8}$ . Теперь нетрудно показать, что последовательность  $A_1; A_4; \dots; A_{3n+1}; \dots$  имеет предел. В самом деле, примем точку  $A_1$  за начало координат на прямой, проходящей через точки нашей последовательности, а за единицу масштаба примем длину отрезка  $A_1A_4$ . Тогда координата точки  $A_{3n+1}$  будет равна

$$x_n = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{8^{n-1}} = \frac{1 - (1/8)^n}{1 - 1/8}.$$

Поэтому существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 8/7$ .

Мы доказали, таким образом, что последовательность точек  $A_1; A_4; A_7; \dots; A_{3n+1}; \dots$  стремится к некоторой точке  $M$ . Точно так же можно доказать, что последовательность  $A_2; A_5; A_8; \dots; A_{3n+2}; \dots$  стремится к некоторой точке  $N$ , а последовательность  $A_3; A_6; A_9; \dots; A_{3n}; \dots$  — к некоторой точке  $P$ . Итак, путь мальчика Пети довольно быстро приближается к движению по сторонам треугольника  $MNP$ . Докажите самостоятельно, что положение точек  $M, N$  и  $P$  зависит только от положения точек  $B, C$  и  $D$  и не зависит от точки  $A_1$ , откуда начинается движение.

**75. Первый способ.** Введем на прямой  $M_1M_2$  систему координат, приняв точку  $M_1$  за начало координат и отрезок  $M_1M_2$  за единицу масштаба. Тогда координата  $x_n$  точки  $M_n$  связана с координатами предыдущих точек соотношением

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$$

(докажите это равенство самостоятельно). Покажем, что последовательность  $\{x_n\}$  стремится к  $2/3$ .

Для этого мы покажем, по индукции, что

$$x_n = \frac{2}{3} \left[ 1 + 2 \cdot \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right].$$

В самом деле, положив  $n = 1$ , получаем

$$x_1 = \frac{2}{3} \left[ 1 + 2 \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \right] = 0,$$

а при  $n = 2$ :

$$x_2 = \frac{2}{3} \left[ 1 + 2 \cdot \left( -\frac{1}{2} \right)^2 \right] = 1.$$

Предположим теперь, что равенство  $x_n = \frac{2}{3} \left[ 1 + 2 \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right]$  доказано для всех  $n \leq k$  и проверим его справедливость при  $n = k + 1$ . Подставляя выражение для  $x_k$  и  $x_{k-1}$  в формулу

$$x_{k+1} = \frac{x_k + x_{k-1}}{2},$$

мы получим

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{\frac{2}{3} \left[ 1 + 2 \cdot \left( -\frac{1}{2} \right)^k \right] + \frac{2}{3} \left[ 1 + 2 \cdot \left( -\frac{1}{2} \right)^{k-1} \right]}{2} = \\ &= \frac{2}{3} \left[ 1 + \left( -\frac{1}{2} \right)^k + \left( -\frac{1}{2} \right)^{k-1} \right] = \\ &= \frac{2}{3} \left[ 1 + \left( -\frac{1}{2} \right)^k (1 - 2) \right] = \frac{2}{3} \left[ 1 + 2 \cdot \left( -\frac{1}{2} \right)^{k+1} \right]. \end{aligned}$$

Второй способ. Рассмотрим точку  $M$ , которая делит отрезок  $M_1M_2$  в отношении  $2:1$ . Докажите, по индукции, что эта же точка  $M$  делит все отрезки  $M_2M_3, M_3M_4, \dots, M_nM_{n+1}$  в отношении  $2:1$ . Отсюда непосредственно вытекает, что длина отрезка  $M_nM$  в  $2^{n-1}$  раз меньше длины отрезка  $M_1M$ . А это значит, что последовательность  $M_1; M_2; \dots; M_n; \dots$  имеет точку  $M$  своим пределом.

76. а) По формуле суммы геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{1 - a^n}{1 - a}.$$

Если  $|a| < 1$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a^n}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}.$$

Если  $|a| > 1$ , то  $S_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Наконец, если  $|a| = 1$ , то получаем или последовательность  $S_n = n$  (при  $a = 1$ ), или  $S_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}$ . Обе эти последовательности не имеют предела. Итак, при  $|a| \geq 1$  ряд расходится.

б) Представим  $S_n$  в виде  $(a + a^2 + \dots + a^n) + (a^2 + a^3 + \dots + a^n) + \dots + (a^{n-1} + a^n) + a^n$ . Применяя к каждому из выражений в скобках формулу суммы геометрической прогрессии, получаем

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a - a^{n+1}}{1 - a} + \frac{a^2 - a^{n+1}}{1 - a} + \dots + \frac{a^n - a^{n+1}}{1 - a} = \\ &= \frac{a + a^2 + \dots + a^n - na^{n+1}}{1 - a} = \\ &= \frac{\frac{a - a^{n+1}}{1 - a} - na^{n+1}}{1 - a} = \frac{a - (n + 1 - na) a^{n+1}}{(1 - a)^2}. \end{aligned}$$

Из этой формулы уже легко выводится (см. задачу 63), что  $S_n \rightarrow \frac{a}{(1-a)^2}$  при  $|a| < 1$ , а при  $|a| \geq 1$  ряд расходится.

в) Так как  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ , то

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1. \end{aligned}$$

г) Так как  $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$ ,

то

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \left( \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} \right) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]; \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}.$$

д) Покажем, что

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

В самом деле, в этой сумме  $n$  членов и наименьший из них равен  $1/(2n)$ . Теперь заметим, что

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots \\ &\quad \dots + \left( \frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) > 1 + \frac{n}{2} \end{aligned}$$

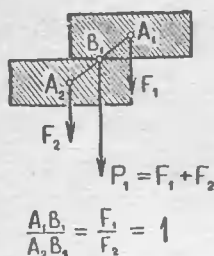


Рис. 26.

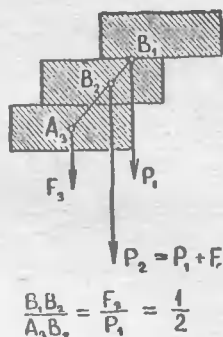


Рис. 27.

(так как каждое из выражений в скобках больше  $1/2$ ). Отсюда вытекает, что  $S_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , значит, ряд расходится.

77. Два кирпича можно положить друг на друга со сдвигом на  $1/2$  (мы считаем длину кирпича равной 1). Равнодействующая  $P_1$  сил  $F_1$  и  $F_2$  проходит на расстоянии  $1/4$  от правого края второго кирпича (рис. 26). Поэтому третий кирпич можно сдвинуть относительно второго влево на  $1/4$ . Теперь нужно найти равнодействующую сил  $P_1$  и  $F_3$ . Поскольку сила  $P_1$  вдвое больше  $F_3$ , точка приложения равнодействующей делит в отношении 2:1 отрезок между точками приложения сил  $F_3$  и  $P_1$  (рис. 27). Отсюда следует, что четвертый кирпич можно сдвинуть относительно третьего на  $1/6$ . Продолжая так дальше, можно проверить (сделайте это самостоятельно, используя принцип математической индукции), что  $(n+1)$ -й кирпич можно сдвинуть относительно  $n$ -го на  $1/(2n)$ .

Таким образом, из  $n$  кирпичей можно построить «крышу» длины  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2(n-1)}$ . Так как ряд  $1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n + \dots$  расходится (см. задачу 76д)), то «крышу» можно сделать как угодно длинной.

78. Последовательность  $\{x_n\}$  удовлетворяет, очевидно, соотношению  $x_{n+1} = 2 + 1/x_n$ . Предположим, что последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел  $a$ . Тогда левая часть равенства стремится к числу  $a$ , а правая часть — к числу  $2 + 1/a$ . Мы получаем, таким образом, равенство  $a = 2 + 1/a$ , откуда  $a = 1 \pm \sqrt{2}$ . Поскольку все  $x_n$  больше 2, число  $1 - \sqrt{2}$  не может быть пределом последовательности  $\{x_n\}$ .



Итак, мы доказали, что если  $\{x_n\}$  имеет предел, то этот предел равен  $1 + \sqrt{2}$ .

Покажем теперь, что искомый предел действительно существует. Обозначим через  $y_n$  разность между  $x_n$  и  $1 + \sqrt{2}$ . Мы должны доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ . Подставляя в равенство  $x_{n+1} = 2 + 1/x_n$  выражение  $x_n$  через  $y_n$ , получаем

$$1 + \sqrt{2} + y_{n+1} = 2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2} + y_n},$$

откуда

$$y_{n+1} = \frac{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2} + y_n) + 1}{1 + \sqrt{2} + y_n} = \frac{(1 - \sqrt{2})y_n}{1 + \sqrt{2} + y_n}.$$

Из этой формулы мы получаем следующую оценку:

$$|y_{n+1}| < \frac{1}{4} |y_n|.$$

В самом деле,  $|1 - \sqrt{2}| < 1/2$ , а  $1 + \sqrt{2} + y_n = x_n > 2$ . Поэтому

$$|y_{n+1}| = \frac{|1 - \sqrt{2}| \cdot |y_n|}{1 + \sqrt{2} + y_n} < \frac{1}{4} |y_n|.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что

$$|y_n| < \frac{|y_1|}{4^{n-1}} < \frac{1}{2^{2n-1}},$$

и, следовательно, последовательность  $\{y_n\}$  стремится к нулю.

**З а м е ч а н и е.** Можно доказать, что последовательность

$$n_1; n_1 + \frac{1}{n_2}; \quad n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3}};$$

$$n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{n_4}}}; \dots,$$

где  $n_1, n_2, n_3, \dots$  — любые натуральные числа, всегда имеет пределом некоторое иррациональное число  $a$ . Если последовательность  $n_1, n_2, n_3, \dots$  — периодическая, то число  $a$  имеет вид  $r_1 + \sqrt{r_2}$ , где  $r_1$  и  $r_2$  — рациональные числа. Верно и обратное — каждое иррациональное число вида  $r_1 + \sqrt{r_2}$  может быть записано в виде бесконечной периодической цепной дроби. Подробнее об этом см. в книге: А. Я. Хинчин, Цепные дроби, изд. 3, М., 1961.

79. а) Сначала докажем, что если предел  $\{x_n\}$  существует, то он равен  $\pm\sqrt{a}$ . В самом деле, пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) = \frac{1}{2} \left( b + \frac{a}{b} \right).$$

Мы получаем равенство  $b = \frac{1}{2} \left( b + \frac{a}{b} \right)$ , откуда

$$b^2 = a, \quad b = \pm \sqrt{a}.$$

Если  $x_0 > 0$ , то все члены последовательности положительны; если же  $x_0 < 0$ , то все члены последовательности отрицательны. Поэтому в первом случае  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$ , а во втором  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\sqrt{a}$ .

Остается доказать, что предел последовательности  $\{x_n\}$  действительно существует. Пусть, для определенности,  $x_0 > 0$  (рис. 28). Обозначим через  $y_n$  разность между  $x_n$  и  $\sqrt{a}$ , деленную на  $\sqrt{a}$ . Подставляя  $x_n = (1 + y_n) \sqrt{a}$  в равенство  $x_{n+1} = 1/2(x_n + a/x_n)$ , мы получим

$$(1 + y_{n+1}) \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left[ (1 + y_n) \sqrt{a} + \frac{a}{(1 + y_n) \sqrt{a}} \right],$$

откуда

$$y_{n+1} = \frac{y_n^2}{2(1 + y_n)}.$$

Нам нужно доказать, что последовательность  $\{y_n\}$  стремится к нулю. Заметим сначала, что так как

$$1 + y_0 = 1 + \frac{x_0 - \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{x_0}{\sqrt{a}} > 0,$$

то все числа  $y_n$  при  $n \geq 1$  положительны. Поэтому

$$|y_{n+1}| = y_{n+1} = \frac{y_n^2}{2(1 + y_n)} < \frac{y_n}{2}.$$

Отсюда вытекает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ .

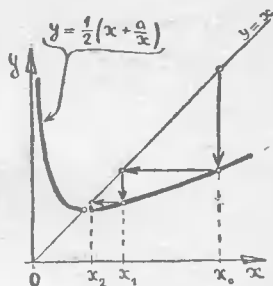


Рис. 28.

б) Рассмотрим конкретный пример:  $a = 10$ ,  $x_0 = 3$ .  
В этом случае

$$y_0 = \frac{3 - \sqrt{10}}{\sqrt{10}}.$$

Так как  $(3,2)^2 = 10,24 > 10$ , то  $\sqrt{10} < 3,2$ . Поэтому

$$|y_0| = \frac{|3 - \sqrt{10}|}{\sqrt{10}} < \frac{0,2}{3} = \frac{1}{15}$$

и, значит,

$$|y_1| = \frac{y_0^2}{2(1+y_0)} < \frac{\left(\frac{1}{15}\right)^2}{2\left(1 - \frac{1}{15}\right)} = \frac{1}{420} < \frac{1}{400}.$$

Далее,

$$|y_2| = \frac{y_1^2}{2(1+y_1)} < \frac{\left(\frac{1}{400}\right)^2}{2} = \frac{1}{320\,000}.$$

Поэтому

$$|x_2 - \sqrt{10}| = y_2 \sqrt{10} < \frac{\sqrt{10}}{320\,000} < 0,00001.$$

Итак, чтобы найти  $\sqrt{10}$  с точностью до 0,00001, достаточно найти член  $x_2$ . Мы имеем

$$x_1 = \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{10}{x_0} \right) = \frac{1}{2} \left( 3 + \frac{10}{3} \right) = 3 \frac{1}{6} = 3,16666 \dots;$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{10}{x_1} \right) = \frac{1}{2} \left( 3 \frac{1}{6} + \frac{10}{3 \frac{1}{6}} \right) = 3 \frac{37}{228} = 3,162280 \dots$$

На самом деле  $\sqrt{10} = 3,16227765 \dots$

Как видите, найденное нами значение действительно отличается от истинного меньше чем на 0,00001.

## ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. Случай  $+$  — невозможен. Остальные возможны.
2. Возможны оценки:  $+++$ ;  $-++$ ;  $+-+$ ;  $---$ .
3. а) Самый низкий из высоких всегда выше, чем самый высокий из низких. б) Изменится. При такой расстановке возможны оба случая.
4. Ответ. 1)  $(+, -)$ ,  $(-, -)$ ; 2)  $(+, -)$ ,  $(-, +)$ ,  $(-, -)$ ;
- 3)  $(+, -)$ ,  $(-, +)$ ; 4)  $(+, -)$ ,  $(-, +)$ ,  $(+, +)$ .
5. Может.
6. Первое и третье; второе и четвертое.
7. Верны теоремы 1 и 6, остальные нет.
8. а) Верно; б) нет, не следует.
9. а) Воспользуйтесь методом от противного. б) Сведите эту задачу к задаче а).
10. Первая группа — теорема 8; вторая группа — теоремы 2, 3, 6 и 7; третья группа — теоремы 4 и 5.
11. Ответ.  $+1$  и  $-1$ . При  $x = 0$  выражение  $|x|/x$  не определено.
12. а)  $a^2$ ; б)  $a - b$ ; в)  $b - a$ ; г)  $-a$ .
13. а), б) Рассмотрите отдельно случаи  $x \geq 0$  и  $x < 0$ . в) Рассмотрите отдельно случаи  $x < -1/2$ ,  $-1/2 \leq x \leq 1/2$  и  $x > 1/2$ .
- Ответ. а)  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -3$ ; б)  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -1$ ; в) отрезок  $[-1/2, 1/2]$ .
14. Рассмотрите отдельно различные случаи расположения точек  $x$ ,  $y$  и 0 на числовой оси. В случае а) равенство возможно, только когда  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  или  $x \leq 0$ ,  $y \leq 0$ . В случае б) возможно, когда  $x \geq y \geq 0$  или  $x \leq y \leq 0$ . В случае в) когда  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  или  $x \leq 0$ ,  $y \leq 0$ .
15. Утверждения а), б) и в) верны; г) неверно.
16. а) Верно; б) верно.
17. а) Периметр — с точностью до 4 см. Точность вычисления площади зависит от величины сторон.
- б) Периметр — с точностью до 1%, площадь с точностью до 2%.
18. а)  $x_3 = 9/8$ ; б)  $x_{10} = 0,05$ ; в)  $x_{999} = x_{1000}$ .
19. а)  $x_2 = x_3 = -5$ ; б)  $x_{10} = 20$ ; в)  $x_3 = -2$ .
20. Последовательность  $\{x_n\}$  называется неограниченной, если для любого числа  $C$  существует такой номер  $n$ , что  $|x_n| > C$ .
21. Например, а)  $x_n = (-1/2)^n$ ; б)  $x_n = 1/n$ ; в)  $x_n = (n-1)/n$ ;
- г)  $x_n = (-1)^n \cdot (n-1)/n$ .

22. а), в) Могут быть истинными и ложными; б) всегда истинно; г), д) всегда ложны.

23. Начиная с  $n = 10\,000$ .

24. Существует.

25. б) Рассмотрите последовательность  $x_n = n^{(-1)^n}$ .

26. а) Существует; б) существует.

27. а) Не существует; б) неизвестно: может существовать и может не существовать.

29. б) Верно.

30. б) Нельзя. См. последовательность из указания к задаче 25б).

31. Используйте задачу 30.

32. а) 0; б) 1; в) 2; г) предела не существует; д) 1; е) 0; ж)  $2/9$ ; з) предела не существует; и) 0; к) предела не существует.

33. Не могут. (Указание. Ср. задачу 31.)

34. б) Сформулируйте, что значит, что число  $a$  не является предельной точкой последовательности.

35. Сравните определения предела и предельной точки.

36. а) 1; б) 1,  $-1$ ; в) 0;  $\pm \sin 1^\circ$ ;  $\pm \sin 2^\circ$ ; ...;  $\pm \sin 89^\circ$ ;  $\pm 1$ ; г) 0; д) предельных точек нет; е) предельные точки заполняют отрезок  $[0, 1]$ .

37. б) Неверно. Рассмотрите пример  $x_n = (-1)^n$ .

38. а)  $x_n \rightarrow \infty$ ; б)  $x_n \rightarrow \infty$ ; в)  $\{x_n\}$  не ограничена; г)  $x_n \rightarrow \infty$ ; д)  $\{x_n\}$  ограничена.

39. 1) Условию удовлетворяют все последовательности. 2) Не все члены последовательности равны  $a$ . 3) Последовательность ограничена. 4) Точка  $a$  не является предельной точкой последовательности. 5) Последовательность не стремится к бесконечности. 6) Число  $a$  не является предельным последовательности. 7) Последовательность ограничена. 9) Число  $a$  является либо одним из членов последовательности  $\{x_n\}$ , либо предельной точкой этой последовательности \*).

Остальные условия являются отрицаниями перечисленных. А именно, условие с номером  $k$  означает, что не выполняется условие с номером  $17 - k$ . Например, условие 10 означает, что не выполняется условие 7, т. е. последовательность не ограничена. Условие 15 означает, что не выполнено условие 2, т. е. все члены последовательности равны  $a$ , и т. д.

40. а)  $+++ + -$ ;  $x_n = a$ ;

$-+++ -$ ;  $x_n = a + \frac{1}{n}$ ;

$--++ -$ ;  $x_n = a + 1 + (-1)^n$ ;

$--+- -$ ;  $x_n = a + n[1 + (-1)^n]$ ;

$---+ -$ ;  $x_n = a + (-1)^n$ ;

$---- +$ ;  $x_n = n$ ;

$---- -$ ;  $x_n = a + 1 + n[1 + (-1)^n]$ .

41. 1)  $x_n = \frac{1}{n}$ ; 2)  $x_n = \frac{n-1}{n}$ ; 3)  $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ .

42. Докажите, что если бесконечная последовательность не имеет наибольшего члена, то из нее можно выбрать бесконечную возрастающую подпоследовательность.

---

\*) Если выполняется условие 9, то точка  $a$  называется точкой прикосновения для последовательности  $\{x_n\}$ .

43. Докажите, что все цифры десятичной дроби  $\alpha$ , начиная с некоторого места, совпадают между собой.

44. Воспользуйтесь аксиомой Больцано — Вейерштрасса.

Ответ. 0.

45. Докажите, что последовательность

$$1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41422, \dots$$

приближенных (с недостатком) значений для  $\sqrt{2}$  монотонна, ограничена и не имеет рационального предела.

46. Воспользуйтесь результатом задачи 42 и аксиомой Больцано — Вейерштрасса.

47. а), б) и в) Верно; пределы равны  $a+b$ ,  $a-b$ ,  $ab$  соответственно. г) Верно, если  $b \neq 0$ ; предел равен  $a/b$ . Неверно, если  $b = 0$ ,  $a \neq 0$ . Может быть верно, а может быть и неверно, если  $a = b = 0$ .

48. а) Не имеет. б) Может иметь, а может и не иметь.

49. а), б) Могут иметь и могут не иметь.

51. б) Воспользуйтесь неравенством  $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$  и докажите, что последовательность  $S_n$  ограничена. в) Рассмотрите отдельно подпоследовательности  $\{S_n\}$ , составленные из членов с четными и нечетными номерами.

53. Пусть  $S_n$  —  $n$ -я частичная сумма ряда  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ , а  $C_n$  —  $n$ -я частичная сумма ряда  $a_1 + 2a_2 + \dots + 2^n a_{2^n} + \dots$ . Дока-

жите, что  $\frac{1}{2}(C_n - a_1) \leq S_{2^{n+1}} - a_1 \leq C_n$ .

54. Воспользуйтесь задачей 53.

56. в) Рассмотрите примеры:  $x_n = n$ , а  $\{y_n\}$  — одна из последовательностей

$$\left\{ \frac{n+1}{n} \right\}, \quad \left\{ \frac{1}{a} \right\}, \quad \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}, \quad \left\{ \frac{1}{n^2} \right\}.$$

57. а)  $x_n = \frac{1}{n^2}$ ;  $y_n = \frac{1}{n}$ ; б)  $x_n = \frac{1}{n}$ ;  $y_n = \frac{1}{n}$ ; в)  $x_n = \frac{1}{n}$ ;  $y_n = \frac{1}{n^2}$ ; г)  $x_n = \frac{1}{n}$ ;  $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$ .

58. а)  $2/3$ ; б) 0; в) 1; г) 1.

59. Докажите, что  $1^k + 2^k + \dots + n^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + Q(n)$ , где  $Q(n)$  — многочлен от  $n$  степени  $\leq k$ .

60. Воспользуйтесь тождеством

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

62. Представьте  $2^n$  в виде  $(1+1)^n$  и используйте формулу бинома.

63. Представьте  $a^n$  в виде  $[1+(a-1)]^n$  и воспользуйтесь формулой бинома.

64. Воспользуйтесь результатом задачи 62.

65. Ответ: 1.

66. а) Докажите, что последовательность  $\{x_n\}$  монотонно убывает.

б) Рассмотрите сначала случай целого  $p$ , затем рационального и, наконец, иррационального; в последнем случае воспользуйтесь неравенством  $l(a) > l(b)$  при  $a > b$ .

67. а) Воспользуйтесь формулой  $l(a^p) = pl(a)$ .

б) Докажите, что  $l(a) < a - 1$ .

в) В качестве  $\varepsilon$  нужно взять  $10^{\frac{1}{l(10)}}$ .

68. б) Рассмотрите разности  $[S_2(a, b)]^2 - [S_1(a, b)]^2$ ,  $[S_{-1}(a, b)]^2 - [S_{-2}(a, b)]^2$ ,  $S_1(a, b) - S_{-1}(a, b)$ .

69. а) Докажите, что при  $a \geq b$

$$a \sqrt[n]{1/2} \leq S_n(a, b) \leq a.$$

б) Выразите  $S_{-n}(a, b)$  через  $S_n(a^{-1}, b^{-1})$ .

в) Докажите, что  $S_{1/n}(a, b) \geq \sqrt[n]{ab}$ , и оцените сверху  $\ln S_{1/n}(a, b)$ , используя неравенство  $\ln a < a - 1$ .

Ответ.  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{1/n}(a, b) = \sqrt{ab}$ .

70. Докажите равенство

$$a_n + na_{n-1} + C_n^2 a_{n-2} + C_n^3 a_{n-3} + \dots + na_1 + a_0 = n!$$

подсчитав число способов, при котором ровно  $k$  писем попадают в свои конверты. Используйте эту формулу для вычисления искомой последовательности  $p_n = a_n/n!$

71. Возьмем начало координат в точке, где находится вторая улитка. Оси координат направим по линиям клетчатой бумаги и за единицу масштаба возьмем одну клетку. Пусть первая улитка в начальный момент находится в точке с координатами  $(a, b)$ . Найдите координаты  $(a_n, b_n)$  точки, в которую попадет улитка за  $n$  шагов. Угловой коэффициент прямой, по которой направлена подозрная труба, равен  $k_n = b_n/a_n$ . Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 1$ .

72. См. указание к задаче 71.

Ответы. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 2$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 1$ ; в) последовательность

$\{k_n\}$  не имеет предела.

73. Опустим из точек  $A_0$  и  $A_n$  перпендикуляры на ось  $Ox$ . Пусть  $P_0$  и  $P_n$  — основания этих перпендикуляров. Докажите, что треугольники  $M_n A_0 P_0$  и  $M_n A_n P_n$  подобны и вычислите отсюда длину отрезка  $M_n P_0$ .

Ответ. Точка  $M$  — середина отрезка  $OP_0$ .

74. Отметьте на листе бумаги три точки, изображающие школу, кинотеатр и каток. Возьмите произвольную четвертую точку и постройте ломаную линию  $A_1 A_2 A_3 A_4 \dots$ , изображающую путь мальчика Пети. Сравните отрезки  $A_1 A_4$ ,  $A_2 A_5$ ,  $A_3 A_6$  и т. д.

75. Точка  $M = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$  делит отрезок  $M_1 M_2$  в отношении 2:1.

76. а)  $S_n = \frac{1-a^n}{1-a}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-a}$  при  $|a| < 1$ ; ряд расходится при  $|a| \geq 1$ .

б) Представьте  $S_n$  в виде суммы  $n$  геометрических прогрессий:

$$S_n = \frac{a - (n+1-a)a^{n+1}}{(1-a)^2};$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{(1-a)^2}$  при  $|a| < 1$ ; ряд расходится при  $|a| \geq 1$ .

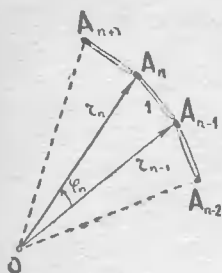


Рис. 29.

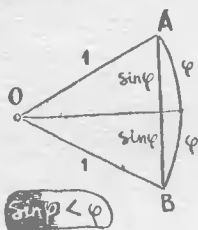


Рис. 30.

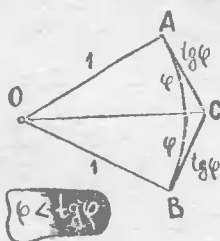


Рис. 31.

в)  $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ .

г)  $S_n = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$ .

д) Докажите, что

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Ряд расходится.

77. Можно построить «крышу» как угодно большой длины. Принимая длину кирпича за 1, докажите по индукции, что кирпичи не будут падать, если  $(n+1)$ -й кирпич (считая сверху) сдвинуть относительно  $n$ -го кирпича на  $1/(2n)$ . После этого воспользуйтесь результатом задачи 76д).

78.  $1 + \sqrt{2}$ .

79. б) Достаточно вычислить  $x_2$ .

80. а) Примем длину спички за единицу и обозначим через  $r_n$  расстояние от начальной точки до конца  $n$ -й спички (рис. 29). Докажите, что  $r_n = \sqrt{n}$ . Далее, пусть  $\varphi_n$  — угол, под которым видна  $n$ -я спичка из начальной точки. Проверьте, что  $\sin \varphi_n = 1/\sqrt{n}$ . Докажите неравенство  $1/\sqrt{n} < \varphi_n$ , используя тот факт, что дуга длиннее стягивающей ее хорды (рис. 30). Теперь воспользуйтесь результатом задачи 54.

Ответ: бесконечно много оборотов.

б) Проверьте, что  $\operatorname{tg} \varphi_n = 1/\sqrt{n-1}$ . Докажите, что  $\varphi_n < 1/\sqrt{n-1}$ , используя тот факт, что дуга короче объемлющей ее ломаной (рис. 31). Выведите отсюда, что

$$2(r_{n+k} - r_{n+1}) < \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n < 2(r_{n+k} - r_{n-1}).$$

Ответ: расстояние между последовательными витками стремится к  $\pi$ .



Александр  
Александрович  
Кириллов

Пределы

М., 1973 г., 96 стр. с илл.

---

Редактор	И. М. Овчинникова
Художник серин	В. В. Смолянинов
Техн. редактор	С. Я. Шкляр
Корректоры:	Е. А. Белицкая, Л. С. Сомова

---

Сдано в набор	16/III 1973 г.
Подп. к печати	1/X 1973 г.
Бумага	84×108 <sup>1</sup> / <sub>32</sub> , тип. № 2.
Физич. печ. л.	3.
Усл. печ л.	5,04.
Уч.-изд. л.	4,62.

Т-14497.

Тираж	200000 экз.
Цена книги	13 коп.
Заказ	579.

Издательство «Наука»  
Главная редакция  
Физико-математической литературы.  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

---

Ордена Трудового Красного Знамени  
Ленинградская типография № 2  
имени Евгении Соколовой  
Союзполиграфпрома при  
Государственном комитете Совета  
Министров СССР по делам издательств,  
полиграфии и книжной торговли  
198052, Ленинград, Измайловский проспект, 29

## Математика

Библиотечка  
физико-математической школы

## Серия основная

- Выпуск 1 И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов, Метод координат.
- Выпуск 2 И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, Э. Э. Шноль, Функции и графики (основные приемы).
- Выпуск 3 С. И. Гельфанд, М. Л. Гервер, А. А. Кириллов, Н. Н. Константинов, А. Г. Кушниренко, Задачи по элементарной математике (последовательности, комбинаторика, пределы).
- Выпуск 4 Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер, Прямые и кривые.
- Выпуск 5 М. И. Башмаков, Уравнения и неравенства.

## Серия дополнительная

- Выпуск 1\* Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, А. А. Толпыго, Математические задачи.
- Выпуск 2\* А. А. Кириллов, Пределы.
- Выпуск 3\* Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, Математические соревнования (арифметика, алгебра).